

LA STATICA DEI CORPI ELASTO-PLASTICI (*)

(Con ventiquattro figure)

GUSTAVO COLONNETTI

Accademico Pontificio

SUMMARIVM. — Auctor, suam antecedentem dissertationem complens, systematica ratione exponit generalem aequilibrum elasto-plastici theoriam, cuius praecipuos quoque technicos usus recenset.

I. — POSIZIONE DEL PROBLEMA ⁽¹⁾.

In natura non esistono corpi perfettamente indeformabili, cioè dotati di forma e di dimensioni assolutamente invariabili.

Tutti i corpi naturali, sotto l'azione di forze esterne anche piccole, subiscono delle deformazioni, più o meno piccole a seconda dei casi, a volte anche così piccole da sfuggire ad un esame superficiale, ma suscettibili sempre di essere misurate quando si disponga di metodi e di strumenti di misura sufficientemente sensibili.

In un primo studio approssimato dei problemi dell'equilibrio di quei corpi naturali le cui deformazioni ci appaiono piccolissime a fronte delle loro dimensioni, si presenta spontanea l'idea di trascurare tali deformazioni e di far dipendere la soluzione di quei problemi da una

(*) Memoria presentata il 30 gennaio 1938.

⁽¹⁾ In una mia precedente Memoria (16) io ho già avuto occasione di precisare la ragion d'essere, nonchè i prevedibili limiti di applicabilità, di una teoria dell'equilibrio elasto-plastico. Ma mi è parso indispensabile riprender qui da capo l'argomento, anche a costo di qualche ripetizione, affinchè riuscisse ben chiara la portata della teoria generale di cui mi accingo ora a dare una esposizione sistematica e, per quanto possibile, completa.

NB. — I numeri in corsivo fra parentesi tonde si riferiscono all'elenco degli scritti dell'autore, riportato al termine della presente Memoria.

teoria dell'equilibrio di corpi ideali supposti dotati di una perfetta indeformabilità.

Di qui l'applicazione della « statica dei corpi rigidi » allo studio dell'equilibrio dei solidi naturali.

Le leggi che l'ipotesi della rigidità conduce a formulare debbono in realtà determinare una soluzione, per lo meno approssimata, del problema, tutte le volte che le deformazioni effettive del corpo naturale che si considera alterano (in ragione della loro piccolezza) di pochissimo le sue condizioni statiche (1).

Senonchè non è affatto detto che debba sempre esser così. Nulla ci autorizza infatti ad escludere la possibilità che quelle deformazioni, per quanto piccolissime, abbiano un'influenza non trascurabile sulle condizioni statiche del corpo.

Che anzi la stessa statica dei corpi rigidi ci rivela non sempre lecita l'ipotesi della perfetta indeformabilità su cui essa si fonda, presentandoci come indeterminati o come impossibili certi casi di equilibrio che, in natura, sono ovviamente possibili e perfettamente determinati.

Convien dunque senz'altro ammettere che, in questi casi, nel sostituire al sistema reale lo schema ideale da sottoporsi al calcolo, noi abbiamo trascurato qualche cosa che non era lecito trascurare.

Ora impossibilità ed indeterminazioni scompaiono immediatamente non appena noi, nei nostri calcoli, introduciamo l'ipotesi di una deformazione, sia pur piccolissima, e comunque definita, del corpo.

Resta così nettamente individuata, in questi casi, la via da seguire; e consiste nel sostituire alla « statica dei corpi rigidi » una « statica dei corpi deformabili ».

Naturalmente il dire che, nello studio dell'equilibrio dei corpi naturali, occorre tener conto della loro deformabilità, non vuol ancora dire che il fenomeno delle variazioni di forma e di dimensioni — che l'esperienza ci rivela come un fenomeno estremamente complesso — possa e debba venir introdotto nei calcoli in tutta la sua complessità.

Noi non dobbiamo infatti dimenticare che, come abbiamo già detto, le deformazioni in questione sono, il più delle volte, piccolissime, e che perciò, pur non potendo e non volendo più trascurarle, noi potremo — ed in un certo senso dovremo, a scanso di inutili complicazioni analitiche — accontentarci di apprezzarle in modo approssimativo.

Si tratterà cioè di sostituire alla prima interpretazione, quando questa vien riconosciuta insufficiente, una seconda interpretazione più prossima alla realtà — e suscettibile di determinare, in ogni caso, la soluzione del problema — ma che non ha, nè potrebbe avere, alcuna pretesa di rappresentare il fenomeno reale con assoluto rigore.

Ora il fatto più caratteristico che ferma la nostra attenzione allorché ci accingiamo a studiare [sperimentalmente il fenomeno delle deformazioni dei corpi naturali è questo: che, se le forze esterne che hanno determinata la deformazione cessano di agire, il corpo tende immediatamente a riprendere la forma e le dimensioni primitive, pur senza pervenirvi mai in modo assoluto.

V'è cioè sempre una parte della deformazione che scompare al cessare dell'azione delle forze che l'hanno prodotta: e si chiama « deformazione elastica ». E v'è sempre un'altra parte della deformazione che permane anche dopo cessata l'azione predetta: e prende il nome di « deformazione permanente » o « deformazione plastica ».

Nel linguaggio comune si usa anzi distinguere senz'altro i corpi in « elastici » o « plastici » a seconda che in essi prevale l'uno o l'altro aspetto del fenomeno.

In realtà non esiste, in natura, nessun corpo perfettamente elastico, come non ne esiste nessuno perfettamente plastico. Elasticità e plasticità sono due proprietà che tutti i corpi naturali posseggono, seppure in differente misura, a seconda della loro natura, dello stato fisico in cui si trovano, della intensità delle forze da cui vengono sollecitati.

Ora avviene che nelle costruzioni, per ragioni assai facili ad intuirsi, trovano più largo e frequente impiego precisamente quei materiali nei quali, finchè la sollecitazione non oltrepassa un certo limite, la deformazione plastica si mantiene piccolissima (cioè praticamente inapprezzabile) rispetto alla deformazione elastica.

Si aggiunga che questo limite — a cui si dà il nome di « limite di elasticità » — è nella maggior parte dei casi assai prossimo a quello che ragioni di sicurezza ci consigliano in pratica di non oltrepassare.

E si comprenderà facilmente come si sia presentata spontanea l'idea di prendere in considerazione, nello studio dei problemi dell'equilibrio, le sole deformazioni elastiche; e come si sia stati così condotti ad introdurre un nuovo tipo di corpo (non meno ideale del « corpo rigido » della statica classica) capace per ipotesi di subire, sotto l'azione

delle forze esterne, dei cambiamenti piccolissimi di forma e di dimensioni che scompaiono al cessare delle cause che li hanno prodotti.

Questo tipo di corpo ideale ha preso il nome di « corpo elastico » e dallo studio delle sue proprietà è nata quella teoria dell'elasticità su cui notoriamente poggia tutta la moderna scienza delle costruzioni (2).

Ma il fatto stesso che questa teoria, che potremmo chiamare di seconda approssimazione, si fonda sulla presunzione che le deformazioni plastiche siano piccolissime rispetto alle deformazioni elastiche, epperò abbiano un'influenza trascurabile sullo stato di equilibrio del sistema, basta da solo a porre dei limiti ben definiti alla sua applicabilità ai problemi dell'equilibrio dei corpi naturali.

D'altronde l'ipotesi della perfetta elasticità conduce, come abbiamo già accennato, ad una soluzione che è in ogni caso unica e ben determinata del problema dell'equilibrio: ci fa cioè considerare come possibile una ed una sola delle infinite soluzioni che soddisfano alle equazioni generali della statica dei corpi rigidi.

Ora un più attento esame dei fatti sperimentali ci ha resi avvertiti che, in natura, non una sola ma tutte quelle soluzioni sono, di volta in volta, possibili; in questo senso, che la soluzione individuata dalla teoria dell'elasticità si realizza effettivamente se, e solo se, le ipotesi della teoria sono verificate (se cioè non interviene nessuna deformazione plastica) mentre le altre soluzioni divengono alla lor volta realizzabili se intervengono opportune deformazioni plastiche, sian pur piccolissime.

Accade cioè ancora una volta, ed a proposito delle deformazioni plastiche, quel che abbiamo già avvertito a proposito delle deformazioni in generale: ché cioè dal fatto della lor piccolezza non discende necessariamente che la loro influenza sul regime statico del corpo sia sempre trascurabile. Ciò avviene bensì in certi casi, ma vi sono anche dei casi in cui quelle deformazioni, pur restando piccolissime, vengono ad avere un'influenza non trascurabile sulle condizioni statiche del corpo.

Di qui la necessità di passare, almeno in questi ultimi casi, ad una teoria che potremmo dire di terza approssimazione: vale a dire ad una statica dei corpi deformabili nella quale, non le sole deformazioni elastiche, ma anche le deformazioni plastiche, vengano tenute nel debito conto.

Resta ben inteso che, ancora una volta, non si tratterà già di introdurre nei nostri calcoli il fenomeno delle deformazioni plastiche in tutta la sua complessità.

Tenuto conto del fatto che il nostro scopo resta sempre quello di studiare delle deformazioni piccolissime, noi ci limiteremo a sostituire alla considerazione del « corpo elastico » quella di un nuovo tipo ideale di corpo, che chiameremo « corpo elasto-plastico », in cui il duplice fenomeno della elasticità e della plasticità verrà introdotto nella forma più semplice.

Ci riferiremo perciò al fatto innegabile che, nei corpi di cui ci vogliamo occupare, e per sollecitazioni molto piccole, il fenomeno elastico è sempre nettamente prevalente; mentre il fenomeno plastico si rende manifesto (e qualche volta assume proporzioni ed influenza dominanti) solo per sollecitazioni più grandi.

Un tale stato di cose si può esprimere postulando l'esistenza di un limite — che continueremo naturalmente a chiamare « limite di elasticità » — al di sotto del quale le deformazioni siano, o si possano con sufficiente approssimazione ritenere, perfettamente elastiche; ed ammettendo che in corrispondenza di quel limite il materiale passi dallo stato perfettamente elastico ad uno stato perfettamente plastico in cui le deformazioni plastiche si sovrappongano alle deformazioni elastiche, senza per altro alterarne le caratteristiche, ed in particolare senza influire sulla loro attitudine ad annullarsi quando cessino di agire le cause che le hanno prodotte (13).

Resta inteso che la sola formulazione di queste ipotesi implica già delle precise limitazioni all'applicabilità della nuova teoria.

Nè si vuol qui escludere che vi possano essere dei casi in cui le conclusioni a cui questa teoria ci condurrà non corrispondano alla realtà del fenomeno fisico, in quanto su questo influiscano in modo non trascurabile altri fattori che qui si è ritenuto opportuno di trascurare.

Basta per esempio pensare a tutti quei casi — e non son pochi nè di poco rilievo — in cui l'esperienza dimostra che non si può prescindere dal fattore tempo; in cui cioè le deformazioni, a parità di sollecitazione, vanno sensibilmente crescendo al crescere della durata di questa.

Ma a questi casi ci basta di avere accennato, sol perchè resti ben chiaramente inteso che non è di essi che noi qui intendiamo occuparci.

E passiamo senz'altro a dare forma analitica alle nostre ipotesi ed a trarne col calcolo le legittime conseguenze, riservandoci di precisare, man mano che ci se ne presenterà l'occasione, le differenti categorie di problemi a cui la nuova teoria potrà venire utilmente applicata.

PARTE I.

LA TEORIA.

II. — ANALISI DELLA DEFORMAZIONE.

Consideriamo un corpo — occupante un certo spazio connesso V e limitato da una superficie o da un complesso di superficie S — il quale, da uno stato iniziale non deformato (stato naturale), sia passato ad uno stato di equilibrio per un dato sistema di forze esterne, mediante certi spostamenti dei suoi punti, le cui componenti

$$u, \quad v, \quad w$$

riterranno funzioni delle coordinate, continue, uniformi e piccolissime rispetto alle dimensioni del corpo, e dotate di derivate parziali prime alla lor volta continue, uniformi e piccolissime a fronte dell'unità.

È noto che, in queste condizioni, lo stato di deformazione in un punto generico del corpo riesce completamente definito dai valori dei sei parametri

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} & \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial z} & \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

tre dei quali rappresentano i coefficienti di dilatazione lineare dei tre elementi uscenti dal punto nelle direzioni degli assi, mentre gli altri tre misurano gli scorrimenti mutui (variazioni degli angoli primitivamente retti) di quegli stessi elementi presi a due a due (2).

I sei parametri prendono perciò il nome di « componenti della deformazione ».

Ora noi vogliamo supporre che a determinare gli spostamenti u, v, w abbiano contribuito due deformazioni ben distinte: l'una elastica le cui componenti indicheremo con

$$\begin{aligned} \varepsilon_x & \quad \gamma_{yz} \\ \varepsilon_y & \quad \gamma_{zx} \\ \varepsilon_z & \quad \gamma_{xy} \end{aligned}$$

l'altra plastica le cui componenti denoteremo con

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_x & \quad \bar{\gamma}_{yz} \\ \bar{\varepsilon}_y & \quad \bar{\gamma}_{zx} \\ \bar{\varepsilon}_z & \quad \bar{\gamma}_{xy} \end{aligned}$$

entrambe continue, uniformi e piccolissime, sì che si possa porre

$$\begin{aligned} \varepsilon_x + \bar{\varepsilon}_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{yz} + \bar{\gamma}_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \varepsilon_y + \bar{\varepsilon}_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{zx} + \bar{\gamma}_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \varepsilon_z + \bar{\varepsilon}_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{xy} + \bar{\gamma}_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad [1]$$

Con ciò si viene evidentemente ad affermare la congruenza della deformazione totale (vale a dire la sua derivabilità da un sistema di spostamenti continui, uniformi e piccolissimi) pur senza esigere che siano separatamente congruenti le due deformazioni componenti.

Tuttavia mentre la prima è veramente e definitivamente dispersa, la seconda resta nel corpo allo stato potenziale; e sommandosi coll'energia potenziale dovuta ad eventuali sollecitazioni ulteriori potrà anche rivelare la sua presenza per il diverso modo con cui il corpo si comporterà per rapporto ad esse; e potrà persino ritrasformarsi in lavoro meccanico se, con opportune operazioni o trattamenti (naturalmente esorbitanti dal campo delle semplici deformazioni) noi riusciremo in qualche modo ad annullare la deformazione plastica, od anche soltanto ad eliminare la sua influenza sul resto del corpo distruggendo i vincoli fra gli elementi deformati plasticamente e quelli in cui il limite di elasticità non è stato ancora raggiunto.

È pertanto di fondamentale importanza tenere distinte queste due frazioni del lavoro speso per produrre le deformazioni plastiche, computando a parte quella che dà luogo ad una effettiva dispersione di energia, ed assimilando l'altra al lavoro speso per produrre le deformazioni puramente elastiche in una valutazione globale dell'energia potenziale.

A questo risultato si giunge nel modo più semplice ritornando alla considerazione dei singoli elementi di volume, presi isolatamente, e distinguendo, nel fenomeno della deformazione di ciascuno di essi, due tempi successivi: l'uno a regime elastico e l'altro a regime plastico.

Nel primo tempo — che non ha termine se non quando nell'elemento si è raggiunto il limite di elasticità del materiale — le tensioni interne crescono dal valore zero al valore finale sotto l'azione della sollecitazione esterna e delle eventuali deformazioni plastiche di altri elementi, dando origine ad una energia potenziale elastica unitaria

$$\varphi(\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy})$$

Nel secondo tempo — che ha naturalmente luogo soltanto per quegli elementi in cui il limite di elasticità è stato raggiunto — le tensioni interne si mantengono costanti (malgrado l'eventuale ulteriore incremento della sollecitazione esterna) mentre, in dipendenza delle deformazioni elastiche degli elementi che non hanno ancor raggiunto il limite di elasticità, si determinano nell'elemento che si considera le

deformazioni plastiche, con un dispendio unitario di lavoro evidentemente misurato da

$$\bar{\varepsilon}_x \sigma_x + \bar{\varepsilon}_y \sigma_y + \dots + \bar{\gamma}_{xy} \tau_{xy}$$

Ne segue che il lavoro di deformazione totale per l'intero corpo si potrà sempre esprimere sotto la forma caratteristica

$$L = \int_V \varphi(\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}) dV + \int_V (\bar{\varepsilon}_x \sigma_x + \bar{\varepsilon}_y \sigma_y + \dots + \bar{\gamma}_{xy} \tau_{xy}) dV \quad [5]$$

in cui l'accennata distinzione è messa esplicitamente in evidenza.

III. — IL NUOVO TEOREMA DEL MINIMO LAVORO.

Consideriamo il corpo dato in un suo stato generico di equilibrio sotto l'azione di un sistema dato di forze.

Dette al solito

$$\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}$$

le sei componenti speciali di tensione nell'elemento generico di volume, ed

$$\bar{\varepsilon}_x, \bar{\varepsilon}_y, \dots, \bar{\gamma}_{xy}$$

le sei componenti della deformazione plastica — nella ipotesi che in quell'elemento il limite di elasticità del materiale sia stato effettivamente raggiunto — immaginiamo di attribuire allo stato di tensione una variazione piccolissima e compatibile con le forze esterne date. Immaginiamo cioè che, ferme restando le deformazioni plastiche, le componenti speciali di tensione subiscano degli incrementi piccolissimi

$$\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \dots, \delta\tau_{xy}$$

costituenti un sistema di tensioni in equilibrio per forze esterne tutte nulle.

Il lavoro di deformazione

$$L = \int_V \varphi(\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}) dV + \int_V (\bar{\varepsilon}_x \sigma_x + \bar{\varepsilon}_y \sigma_y + \dots + \bar{\gamma}_{xy} \tau_{xy}) dV \quad [5]$$

subirà una variazione prima

$$\delta L = \int_V \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_x} \delta \sigma_x + \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_y} \delta \sigma_y + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{xy}} \delta \tau_{xy} \right) dV + \\ + \int_V \left(\bar{\varepsilon}_x \delta \sigma_x + \bar{\varepsilon}_y \delta \sigma_y + \dots + \bar{\gamma}_{xy} \delta \tau_{xy} \right) dV$$

la quale, tenuto conto delle [4], si può scrivere più semplicemente così

$$\delta L = \int_V [(\varepsilon_x + \bar{\varepsilon}_x) \delta \sigma_x + (\varepsilon_y + \bar{\varepsilon}_y) \delta \sigma_y + \dots + (\gamma_{xy} + \bar{\gamma}_{xy}) \delta \tau_{xy}] dV$$

e rappresenta il lavoro che il sistema delle tensioni

$$\delta \sigma_x, \delta \sigma_y, \dots, \delta \tau_{xy}$$

compirebbero se al corpo venisse attribuita la variazione virtuale di configurazione di componenti

$$\varepsilon_x + \bar{\varepsilon}_x, \varepsilon_y + \bar{\varepsilon}_y, \dots, \gamma_{xy} + \bar{\gamma}_{xy},$$

Ora il sistema di tensioni

$$\delta \sigma_x, \delta \sigma_y, \dots, \delta \tau_{xy}$$

è per ipotesi in equilibrio per forze esterne tutte nulle.

D'altra parte la variazione virtuale di configurazione che ha per componenti

$$\varepsilon_x + \bar{\varepsilon}_x, \varepsilon_y + \bar{\varepsilon}_y, \dots, \gamma_{xy} + \bar{\gamma}_{xy}$$

è certamente congruente e compatibile coi vincoli: essa è infatti proprio quella che il corpo ha effettivamente dovuto subire per passare

dallo stato naturale non deformato allo stato di equilibrio da noi considerato.

In virtù del principio dei lavori virtuali dovrà dunque essere

$$\int_V [(\varepsilon_x + \bar{\varepsilon}_x) \delta \sigma_x + (\varepsilon_y + \bar{\varepsilon}_y) \delta \sigma_y + \dots + (\gamma_{xy} + \bar{\gamma}_{xy}) \delta \tau_{xy}] dV = 0 \quad [6]$$

Se si tien conto che la variazione seconda si riduce a

$$\delta^2 L = \int_V \varphi(\delta \sigma_x, \delta \sigma_y, \dots, \delta \tau_{xy}) dV$$

epperò è essenzialmente positiva, si può senz'altro enunciare il seguente teorema (13):

Le tensioni interne che caratterizzano lo stato di equilibrio considerato sono quelle che rendono minima l'espressione del lavoro di deformazione totale — somma dell'energia potenziale elastica e del lavoro disperso per deformazioni plastiche — per rapporto a tutti i valori che l'espressione stessa può assumere compatibilmente colla deformazione plastica e colle forze esterne date.

* * *

A proposito di questo teorema — che costituisce il fondamento di tutta la teoria dell'equilibrio elasto-plastico, ed il punto di partenza di tutte le sue applicazioni tecniche — bisogna ben tenere presente che la variazione di componenti

$$\delta \sigma_x, \delta \sigma_y, \dots, \delta \tau_{xy}$$

che noi abbiamo immaginata impressa allo stato di tensione che caratterizza l'equilibrio, non corrisponde ad alcuna variazione di configurazione effettivamente realizzabile.

Ne segue che, mentre L ha, come abbiamo a suo tempo dimostrato, un significato fisico ben definito (lavoro di deformazione totale) le sue variazioni qui considerate non sono suscettibili di un'analoga interpretazione.

Il minimo da noi stabilito non è pertanto un minimo di una grandezza fisica, ma soltanto il minimo di una funzione analitica, la quale, in corrispondenza del sistema di valori delle variabili che caratterizza lo stato di equilibrio, e solo allora, assume il significato fisico che ci ha permesso di darle un nome.

A rigore, il teorema dianzi dimostrato dovrebbe dunque più propriamente enunciarsi così:

Le tensioni interne che caratterizzano lo stato di equilibrio considerato sono quelle che rendono minima l'espressione

$$\int_V \varphi(\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}) dV + \int_V (\bar{\varepsilon}_x \sigma_x + \bar{\varepsilon}_y \sigma_y + \dots + \bar{\gamma}_{xy} \tau_{xy}) dV$$

per rapporto a tutti i valori che l'espressione stessa può assumere compatibilmente colla deformazione plastica e colle forze esterne date.

Sotto questa forma — valevole non soltanto nel caso delle deformazioni plastiche di cui qui ci occupiamo, ma nel caso più generale di deformazioni impresse affatto qualunque, per le quali del significato fisico della funzione non è neppur più il caso di parlare — il teorema è stato da me enunciato e posto a base di una teoria generale delle coazioni elastiche, in una serie di Memorie pubblicate tra il 1918 ed il 1921 (9, 11).

* * *

Se tutte le deformazioni plastiche (o comunque impresse)

$$\bar{\varepsilon}_x, \bar{\varepsilon}_y, \dots, \bar{\gamma}_{xy}$$

sono identicamente nulle, sì che il problema si riduce nell'ambito della teoria classica dell'elasticità, l'equazione [6] diviene

$$\int_V (\varepsilon_x \delta \sigma_x + \varepsilon_y \delta \sigma_y + \dots + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy}) dV = 0 \quad [7]$$

ed esprime la condizione di minimo dell'energia potenziale elastica

$$\Phi = \int_V \varphi(\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}) dV$$

Si ritrova così, com'era prevedibile, il teorema di MENABREA.

Ora è di fondamentale importanza il notare che l'equazione [6] che noi assumiamo a fondamento della teoria dell'equilibrio elasto-plastico, non differisce dall'equazione [7] che è nello stesso senso fondamentale nella teoria classica dell'elasticità, se non in quanto alle sei componenti della deformazione elastica

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \gamma_{xy}$$

si vengono qui a sostituire le sei componenti corrispondenti della deformazione totale:

$$\varepsilon_x + \bar{\varepsilon}_x, \varepsilon_y + \bar{\varepsilon}_y, \dots, \gamma_{xy} + \bar{\gamma}_{xy}$$

Il che ci permette di prevedere che — sotto riserva di analoghi rapporti tra le condizioni ai limiti che ciascun problema particolare naturalmente comporta — le soluzioni note dei vari problemi della teoria classica dell'elasticità potranno (con la suaccennata sostituzione) venir trasformate in altrettante soluzioni di analoghi problemi della teoria dell'equilibrio elasto-plastico (16).

Possiam del resto renderci conto fin d'ora delle possibilità di applicazione del teorema alla risoluzione di problemi concreti.

A tal fine supponiamo:

1) che si possano riferire i singoli stati di tensione in equilibrio colle forze esterne date, ai singoli sistemi di valori di k parametri indipendenti (incognite iperstatiche).

$$X_1, X_2, \dots, X_k$$

biunivocamente e linearmente, cioè in modo tale che le componenti speciali di tensione si possano tutte esprimere come funzioni lineari di quei k parametri;

2) che si possa caratterizzare la deformazione plastica per mezzo di un certo numero $h \leq k$ di altri parametri indipendenti (caratteristiche della coazione)

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_h$$

per modo che da essi si posson poi dedurre le soluzioni (rigorose od approssimate) di tutti gli altri casi, anche i più complicati.

I casi particolari per cui la soluzione di DE SAINT-VENANT è rigorosa sono precisamente quelli in cui ogni elemento superficiale, idealmente tracciato nell'interno del corpo secondo una giacitura parallela all'asse delle z , è soggetto soltanto ad una tensione tangenziale nella direzione di quest'asse.

Ciò equivale evidentemente a supporre, in ogni punto del corpo

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 0 \\ \tau_{xy} &= 0 \\ \sigma_y &= 0\end{aligned}\quad [10]$$

Ammesso che il materiale sia isotropo, e che quindi l'energia potenziale elastica elementare si possa ovunque porre sotto la forma [9], se ne possono dedurre, secondo le [4], le espressioni delle componenti della deformazione in funzione delle componenti speciali di tensione (non nulle)

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= -\frac{1}{mE} \sigma_z & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \varepsilon_y &= -\frac{1}{mE} \sigma_z & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \sigma_z & \gamma_{xy} &= 0\end{aligned}\quad [11]$$

e, reciprocamente, quelle delle componenti speciali di tensione (non nulle) in funzione delle componenti della deformazione

$$\begin{aligned}\sigma_z &= E \varepsilon_z & \tau_{yz} &= G \gamma_{yz} \\ \tau_{zx} &= G \gamma_{zx}\end{aligned}\quad [12]$$

* * *

Con riferimento a quanto abbiain detto nel precedente capitolo, noi affronteremo il problema per via indiretta, valendoci delle espressioni che, secondo DE SAINT-VENANT, competono alle tre componenti della deformazione elastica

$$\varepsilon_z \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}$$

per attribuirle alle componenti della deformazione totale

$$\varepsilon_z + \bar{\varepsilon}_z \quad \gamma_{yz} + \bar{\gamma}_{yz} \quad \gamma_{zx} + \bar{\gamma}_{zx}$$

La sollecitazione — che in realtà dovrebbe essere uno dei dati del problema — resta così implicitamente determinata, e verrà calcolata in conseguenza. E precisamente, coi valori delle

$$\sigma_z \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}$$

che risultano dalle [12] si calcoleranno le caratteristiche della sollecitazione relativa alla sezione generica di quota z

$$\begin{aligned}N &= \int_A \sigma_z dA \\ M &= \int_A \sigma_z y dA & M' &= \int_A \sigma_z x dA \\ Q &= \int_A (\tau_{yz} x - \tau_{zx} y) dA \\ T &= \int_A \tau_{yz} dA & T' &= \int_A \tau_{zx} dA\end{aligned}\quad [13]$$

e, come caso particolare, quelle della sollecitazione esterna sulle due basi

$$z = 0 \quad \text{e} \quad z = l$$

A questo proposito occorre appena avvertire che, data l'assenza di forze di massa e di azioni sulla superficie laterale, le caratteristiche N , T , T' , Q riescono indipendenti da z mentre M , M' riescono lineari in z , e più precisamente tali che

$$\frac{dM}{dz} = T \quad \frac{dM'}{dz} = T' \quad [14]$$

Ecco pertanto i quattro casi particolari, mediante combinazioni lineari dei quali si può poi risalire alla soluzione diretta e generale del problema, vale a dire alla determinazione dello stato di deformazione relativo ad una sollecitazione le cui sei caratteristiche siano date ad arbitrio (16).

PRIMO CASO PARTICOLARE.

Detta λ una costante piccolissima, poniamo

$$\begin{aligned}\varepsilon_z + \bar{\varepsilon}_z &= \lambda \\ \gamma_{yz} &= \bar{\gamma}_{yz} = 0 \\ \gamma_{zx} &= \bar{\gamma}_{zx} = 0\end{aligned}\quad [15]$$

Delle sei caratteristiche della sollecitazione relativa alla sezione generica di quota z , le tre ultime sono identicamente nulle.

La seconda e la terza si annullano esse pure se le deformazioni plastiche son tali che

$$\int_A \bar{\varepsilon}_z x dA = \int_A \bar{\varepsilon}_z y dA = 0$$

Resta così soltanto la sollecitazione ad estensione semplice, definita da uno sforzo normale N in funzione del quale si può esprimere la costante

$$\lambda = \frac{N + E \int_A \bar{\varepsilon}_z dA}{EA} \quad [16]$$

Sostituendo questo valore di λ nella prima delle [15], si ha

$$\varepsilon_z + \bar{\varepsilon}_z = \frac{N + E \int_A \bar{\varepsilon}_z dA}{EA}$$

e quindi

$$\sigma_z = E \varepsilon_z = \frac{N + E \int_A \bar{\varepsilon}_z dA}{A} - E \bar{\varepsilon}_z \quad [17]$$

SECONDO CASO PARTICOLARE.

Detta μ una costante piccolissima, poniamo

$$\begin{aligned}\varepsilon_z + \bar{\varepsilon}_z &= \mu y \\ \gamma_{yz} &= \bar{\gamma}_{yz} = 0 \\ \gamma_{zx} &= \bar{\gamma}_{zx} = 0\end{aligned}\quad [18]$$

Anche questa volta, delle sei caratteristiche della sollecitazione, le tre ultime sono identicamente nulle. Si annullano poi anche la prima e la terza se le deformazioni plastiche son tali che

$$\int_A \bar{\varepsilon}_z dA = \int_A \bar{\varepsilon}_z x dA = 0$$

Resta così soltanto una sollecitazione a flessione semplice, dovuta al momento flettente M in funzione del quale si può esprimere la costante

$$\mu = \frac{M + E \int_A \bar{\varepsilon}_z y dA}{EJ} \quad [19]$$

Sostituendo questo valore di μ nella prima delle [18], si ha

$$\varepsilon_z + \bar{\varepsilon}_z = \frac{M + E \int_A \bar{\varepsilon}_z y dA}{EJ} y$$

e quindi

$$\sigma_z = E \varepsilon_z = \frac{M + E \int_A \bar{\varepsilon}_z y dA}{J} y - E \bar{\varepsilon}_z \quad [20]$$

al momento torcente effettivamente applicato Q

un momento torcente fittizio $\bar{Q} = Q + G \int_A (\bar{\gamma}_{yz} x - \bar{\gamma}_{zx} y) dA$

allo sforzo di taglio effettivamente applicato T

uno sforzo di taglio fittizio $\bar{T} = T + G \int_A \bar{\gamma}_{yz} dA$

rendendo così ragione di due fatti nuovi che caratterizzano il modo di deformarsi di un corpo in equilibrio elasto-plastico; e cioè:

1) il fatto che le deformazioni non son più delle funzioni lineari delle forze esterne applicate, ma crescono più rapidamente di queste;

2) il fatto che una quota parte di dette deformazioni ha carattere permanente, cioè continua a sussistere anche quando le forze esterne hanno cessato di agire.

Un mutamento anche qualitativo si riscontra invece nello stato di tensione che, in ciascun punto del corpo, dipende non soltanto dalla sollecitazione esterna e dal suo apparente incremento dovuto al complesso delle deformazioni plastiche, ma anche ed esplicitamente dalla entità delle deformazioni plastiche che, proprio in quel punto, si sono verificate. Ciò che può dar luogo a distribuzioni di tensioni sostanzialmente diverse da quelle caratteristiche della teoria classica dell'elasticità; distribuzioni in cui non solo le grandezze, ma le posizioni stesse delle tensioni massime (che tanto interessano l'ingegnere) possono risultare completamente alterate.

Non è senza importanza, dal punto di vista della interpretazione del fenomeno fisico, il precisare che questa dipendenza dello stato di tensione dalle deformazioni plastiche locali, si traduce in pratica in una limitazione delle tensioni interne là dove il materiale, secondo le leggi della perfetta elasticità, riuscirebbe maggiormente sollecitato (o quanto meno, sollecitato al di là dei suoi limiti di elasticità); e che a tale limitazione fa, com'è logico, immediato riscontro l'intensificarsi delle tensioni interne in regioni del corpo che, in regime di perfetta elasticità, sarebbero rimaste meno sollecitate (o quanto meno, sollecitate al di sotto dei limiti di elasticità) e che vengono così automaticamente chiamate a prestare un maggior contributo alla resistenza dell'insieme.

V. — IL SECONDO PRINCIPIO DI RECIPROCIÀ.

Noi vogliamo ora considerare e mettere fra loro in rapporto due ben distinti stati di equilibrio del corpo.

Per definire quello che chiameremo il primo stato, supporremo che sul corpo agisca un dato sistema di forze esterne.

Denoteremo al solito con

$$F'_x \quad F'_y \quad F'_z$$

le tre componenti, riferite all'unità di volume, della forza applicata all'elemento di volume dV ; e con

$$P'_x \quad P'_y \quad P'_z$$

le analoghe componenti, riferite all'unità di superficie, della forza applicata all'elemento di superficie dS .

Siano poi

$$\sigma'_{xx} \quad \sigma'_{yy} \quad \sigma'_{zz} \quad \tau'_{yz} \quad \tau'_{zx} \quad \tau'_{xy}$$

le sei componenti speciali di tensione che una tale sollecitazione determina;

$$\varphi(\sigma'_{xx}, \sigma'_{yy}, \dots, \tau'_{xy})$$

l'energia potenziale elastica elementare unitaria; ed

$$\varepsilon'_{xx} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{xx}} \right)' \quad \gamma'_{yz} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{yz}} \right)'$$

$$\varepsilon'_{yy} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{yy}} \right)' \quad \gamma'_{zx} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{zx}} \right)'$$

$$\varepsilon'_{zz} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{zz}} \right)' \quad \gamma'_{xy} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{xy}} \right)'$$

le corrispondenti componenti della deformazione.

Il secondo stato di equilibrio lo supporremo invece determinato imponendo al corpo un dato sistema di deformazioni plastiche.

Siano

$$\bar{\varepsilon}''_x \quad \bar{\varepsilon}''_y \quad \bar{\varepsilon}''_z \quad \bar{\gamma}''_{yz} \quad \bar{\gamma}''_{zx} \quad \bar{\gamma}''_{xy}$$

le loro componenti; e

$$\sigma''_x \quad \sigma''_y \quad \sigma''_z \quad \tau''_{yz} \quad \tau''_{zx} \quad \tau''_{xy}$$

le componenti speciali di tensione che caratterizzano lo stato di coazione a cui quelle deformazioni plastiche danno origine;

$$\varphi(\sigma''_x, \sigma''_y, \dots, \tau''_{xy})$$

l'energia potenziale elastica elementare unitaria (energia vincolata);

$$\begin{aligned} \varepsilon''_x &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_x} \right)'' & \gamma''_{yz} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{yz}} \right)'' \\ \varepsilon''_y &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_y} \right)'' & \gamma''_{zx} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{zx}} \right)'' \\ \varepsilon''_z &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_z} \right)'' & \gamma''_{xy} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{xy}} \right)'' \end{aligned}$$

le corrispondenti componenti della deformazione elastica; ed

$$u'' \quad v'' \quad w''$$

le componenti dello spostamento che nel punto generico del corpo si verifica per il sovrapporsi delle deformazioni plastiche e delle deformazioni elastiche che le accompagnano; componenti di spostamento che debbono notoriamente riuscir legate alle componenti di deformazione dalle relazioni

$$\begin{aligned} \varepsilon''_x + \bar{\varepsilon}''_x &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)'' & \gamma''_{yz} + \bar{\gamma}''_{yz} &= \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)'' + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)'' \\ \varepsilon''_y + \bar{\varepsilon}''_y &= \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)'' & \gamma''_{zx} + \bar{\gamma}''_{zx} &= \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)'' + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)'' \\ \varepsilon''_z + \bar{\varepsilon}''_z &= \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)'' & \gamma''_{xy} + \bar{\gamma}''_{xy} &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)'' + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)'' \end{aligned}$$

Ciò posto applichiamo il principio dei lavori virtuali adottando, per esprimere le condizioni di equilibrio delle forze in gioco in uno dei due stati, la variazione di configurazione che caratterizza l'altro.

Si ha così nell'un caso

$$\begin{aligned} \int_V [\sigma'_x(\varepsilon''_x + \bar{\varepsilon}''_x) + \sigma'_y(\varepsilon''_y + \bar{\varepsilon}''_y) + \dots + \tau'_{xy}(\gamma''_{xy} + \bar{\gamma}''_{xy})] dV = \\ = \int_V [F'_x u'' + F'_y v'' + F'_z w''] dV + \int_S [P'_x u'' + P'_y v'' + P'_z w''] dS \end{aligned}$$

e nell'altro

$$\int_V [\sigma''_x \varepsilon'_x + \sigma''_y \varepsilon'_y + \dots + \tau''_{xy} \gamma'_{xy}] dV = 0$$

Ora per una nota, e del resto facilmente dimostrabile, proprietà delle funzioni quadratiche

$$\begin{aligned} \sigma''_x \varepsilon'_x + \sigma''_y \varepsilon'_y + \dots + \tau''_{xy} \gamma'_{xy} &= \sigma''_x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_x} \right)' + \sigma''_y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_y} \right)' + \dots + \tau''_{xy} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{xy}} \right)' = \\ &= \sigma'_x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_x} \right)'' + \sigma'_y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_y} \right)'' + \dots + \tau'_{xy} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{xy}} \right)'' = \sigma'_x \varepsilon''_x + \sigma'_y \varepsilon''_y + \dots + \tau'_{xy} \gamma''_{xy} \end{aligned}$$

La seconda delle equazioni scritte si può quindi immediatamente trasformare nella seguente

$$\int_V [\sigma'_x \varepsilon''_x + \sigma'_y \varepsilon''_y + \dots + \tau'_{xy} \gamma''_{xy}] dV = 0$$

dopo di che la prima diviene

$$\begin{aligned} \int_V [\sigma'_x \bar{\varepsilon}''_x + \sigma'_y \bar{\varepsilon}''_y + \dots + \tau'_{xy} \bar{\gamma}''_{xy}] dV = \\ = \int_V [F'_x u'' + F'_y v'' + F'_z w''] dV + \int_S [P'_x u'' + P'_y v'' + P'_z w''] dS \end{aligned} \quad [27]$$

Di qui il teorema (20):

L'integrale (esteso a tutto il corpo) della somma dei prodotti delle singole componenti di una deformazione plastica per le corrispondenti

componenti speciali di tensione dovute ad un sistema qualunque di forze esterne, è uguale al lavoro che queste forze esterne eseguirebbero nel cambiamento di configurazione a cui quella deformazione plastica dà origine.

* * *

Facciamo l'ipotesi che il sistema di forze esterne che, colla sua azione, determina il primo stato di equilibrio, si riduca ad un'unica forza di intensità unitaria, applicata in un dato punto del corpo secondo una data direzione.

Il secondo membro della nostra equazione si riduce allora all'espressione del lavoro che questa forza farebbe nella variazione di configurazione determinata dal dato sistema di deformazioni plastiche; lavoro misurato dallo stesso numero che misura la componente dello spostamento del punto considerato nella direzione prescelta.

E il teorema diviene:

Lo spostamento di un punto generico del corpo in una data direzione, dovuto ad un dato sistema di deformazioni plastiche, è eguale all'integrale esteso a tutto il corpo della somma dei prodotti delle singole componenti della deformazione plastica per le corrispondenti componenti dello stato di tensione determinato nel corpo stesso da una forza unitaria supposta applicata in quel punto e secondo quella direzione.

Questo teorema — che vale non soltanto nel caso delle deformazioni plastiche di cui qui esclusivamente ci occupiamo, ma anche nel caso assai più generale di deformazioni impresse affatto qualunque — è stato, da chi scrive, dimostrato tra il 1912 ed il 1915 (3, 4), e posto in seguito a base di tutta la teoria delle linee d'influenza delle tensioni interne nei sistemi elastici (12) (1).

Nel caso dei corpi elasto-plastici si può, in modo perfettamente analogo, fondare su di esso tutta una teoria delle linee d'influenza delle deformazioni permanenti (20).

(1) Cfr. anche O. SESINI, *Sulle coazioni elastiche*, « Atti della Pontificia Accademia delle Scienze, Nuovi Lincei », anno LXXIX, 1926.

PARTE II.

LE APPLICAZIONI.

VI. — UN CASO PARTICOLARE: LE TRAVATURE RETICOLARI.

Nel caso particolare delle travature reticolari, la funzione che, nello stato di equilibrio, si deve render minima, si può scrivere sotto la forma

$$\Sigma \frac{S^2 l}{2EA} + \Sigma \bar{s} S$$

dove l rappresenta al solito la lunghezza dell'asta generica;

A l'area della sua sezione retta;

E il modulo di elasticità normale del materiale di cui essa è costituita;

S lo sforzo che le compete nello stato di equilibrio che si considera, e quindi

$$s = \frac{Sl}{EA}$$

la sua variazione *elastica* di lunghezza, mentre con

$$\bar{s}$$

si è indicata la sua variazione *plastica*.

Se k è il numero delle aste sovrabbondanti (grado di iperstaticità del sistema) e se si assumono gli sforzi in tali aste come incognite iperstatiche

$$X_1, X_2, \dots X_k$$

allo sforzo nell'asta generica si potrà sempre attribuire l'espressione

$$S = S_p + S_1 X_1 + S_2 X_2 + \dots + S_k X_k$$

essendo S_p lo sforzo che all'asta stessa compete nella travatura principale supposta sollecitata dal dato sistema di forze esterne,

$$S_1 = \frac{\partial S}{\partial X_1}, \quad S_2 = \frac{\partial S}{\partial X_2}, \quad \dots \quad S_k = \frac{\partial S}{\partial X_k}$$

gli sforzi che, nella stessa asta generica, sarebbero determinati dalle singole sollecitazioni

$$X_1=1, \quad X_2=1, \quad \dots \quad X_k=1$$

Perciò la condizione di minimo

$$\Sigma (s + \bar{s}) \delta S = 0 \quad [28]$$

si risolve in questo caso nelle k equazioni

$$\begin{aligned} \Sigma (s + \bar{s}) \frac{\partial S}{\partial X_1} &= 0 \\ \Sigma (s + \bar{s}) \frac{\partial S}{\partial X_2} &= 0 \\ &\dots \dots \dots \\ \Sigma (s + \bar{s}) \frac{\partial S}{\partial X_k} &= 0 \end{aligned} \quad [29]$$

* * *

Vediamo di farne l'applicazione ad un caso concreto, la cui voluta semplicità ci permetterà d'interpretare più facilmente i singoli risultati (13).

Supponiamo dunque che si voglia far sopportare un certo sforzo di trazione (verticale) P ad un telaio iperstatico del tipo di quello rappresentato in figura 1.

Un tale telaio si può evidentemente considerare come costituito dall'insieme di un'asta verticale (fig. 2) e di un quadrilatero a diago-

nale orizzontale (fig. 3); considerando questo quadrilatero come travatura principale, adotteremo la diagonale verticale come asta sovrabbondante, ed il relativo sforzo X come incognita iperstatica.

Supposte le due diagonali di egual lunghezza l , e detta A l'area della loro sezione retta, attribuiremo alle quattro aste di contorno, di lunghezze eguali ad $\frac{l}{\sqrt{2}}$, sezioni rette di area eguale ad $\frac{A}{\sqrt{2}}$.

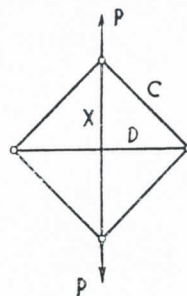


FIG. 1.



FIG. 2.

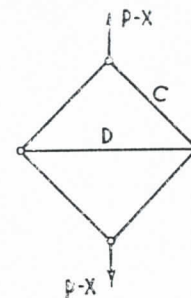


FIG. 3.

Designeremo con C e con D rispettivamente gli sforzi nelle aste di contorno e nella diagonale orizzontale. Dalla statica dei sistemi rigidi si ha

$$C = \frac{P-X}{\sqrt{2}} \quad D = -(P-X)$$

quindi

$$\frac{\partial C}{\partial X} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{\partial D}{\partial X} = 1$$

mentre dalla teoria generale dell'equilibrio elasto-plastico si è condotti a scrivere un'equazione del tipo

$$\Sigma (s + \bar{s}) \frac{\partial S}{\partial X} = 0$$

Nel caso concreto, se incominciamo col supporre che le $\bar{s}$ siano tutte nulle, ponendoci quindi dal punto di vista della teoria classica dell'elasticità, quest'ultima equazione ci dà

$$X = \frac{3}{4} P$$

e per conseguenza

$$C = \frac{1}{4} \frac{P}{\sqrt{2}}$$

$$D = -\frac{1}{4} P$$

[30]

Notiamo subito che questa soluzione è poco soddisfacente in quanto accusa una scarsa partecipazione del quadrilatero alla resistenza dell'insieme, ed una utilizzazione soltanto parziale delle caratteristiche resistenti del materiale in esso impiegato.

Notiamo ancora che si potrebbe bensì, volendolo, far crescere a piacere la frazione del carico sopportata dal quadrilatero, e scaricare in conseguenza la diagonale verticale; ma che per far ciò bisognerebbe evidentemente accrescere la rigidità del quadrilatero adottando per le sue aste sezioni maggiori, con che non migliora il grado di utilizzazione delle caratteristiche del materiale; ed il maggior quantitativo di esso, impiegato nella costruzione del quadrilatero, non viene, se non in piccola parte, compensato dalla riduzione di dimensioni realizzabile nella diagonale verticale.

La soluzione resta quindi in ogni caso eminentemente anti-economica.

Una soluzione economica si ottiene invece se si provvede a creare nel sistema un opportuno stato di coazione; ed il modo più semplice per ottenerlo è proprio quello di provocare una deformazione plastica dell'asta sovrabbondante.

Si supponga infatti che la sezione A di quest'asta sia stata scelta per modo che, quando la forza esterna raggiungerà il valore $P' = \frac{2}{3} P$ (sicchè nell'asta si generi lo sforzo $X' = \frac{3}{4} P' = \frac{1}{2} P$) il materiale raggiunga ivi il suo limite di elasticità.

È inteso che, se adottiamo le nostre solite convenzioni, da quell'istante in poi — vale a dire mentre la sollecitazione esterna conti-

nuerà a crescere da P' a P — lo sforzo in quell'asta non potrà crescere più, ma resterà definitivamente stabilizzato sul valore $\frac{1}{2} P$.

Si determinerà intanto nell'asta stessa una variazione permanente di lunghezza $\bar{s}$ grazie alla quale l'equilibrio si potrà tuttavia raggiungere quando sia verificata l'equazione

$$\Sigma (s + \bar{s}) \frac{\partial S}{\partial X} = 0$$

In essa tutte le altre $\bar{s}$ continuano naturalmente ad esser nulle.

Se pertanto si attribuisce ad X il suo valore $\frac{1}{2} P$, si può da quell'equazione ricavare

$$\bar{s} = P \frac{l}{EA}$$

Nel frattempo, mentre lo sforzo nell'asta sovrabbondante resta, come si è detto, fermo al valore

$$X = \frac{1}{2} P$$

gli sforzi nelle altre aste dovranno raggiungere i valori obbligati

$$C = \frac{1}{2} \frac{P}{\sqrt{2}}$$

$$D = -\frac{1}{2} P$$

[31]

Nelle nuove condizioni di equilibrio così definite, il quadrilatero si è dunque addossata effettivamente la metà del carico, e la resistenza dei materiali è ovunque utilizzata appieno.

* * *

Dalla condizione di equilibrio sotto carico, testè definita, si può risalire allo stato naturale — vale a dire allo stato di equilibrio per

forze esterne tutte nulle — sia ricorrendo al principio di sovrapposizione, sia riprendendo ancora una volta in considerazione l'equazione

$$\Sigma (s + \bar{s}) \frac{\partial S}{\partial X} = 0$$

ed attribuendo in essa alla deformazione plastica della diagonale verticale il valore ricavato poc'anzi, ed agli sforzi ed alle loro derivate i valori che loro spettano per $P = 0$.

Si trova così

$$X = -\frac{1}{4} P$$

e per conseguenza

$$C = \frac{1}{4} \frac{P}{\sqrt{2}} \quad D = -\frac{1}{4} P \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} X = -\frac{1}{4} P \\ C = \frac{1}{4} \frac{P}{\sqrt{2}} \\ D = -\frac{1}{4} P \end{matrix}} \right\} [32]$$

Questo stato naturale rappresenta il nuovo punto di partenza per ogni deformazione (sia elastica che plastica) ulteriore.

* * *

Ecco ora un secondo esempio, un po' meno semplice del primo, ma che rispecchia un problema di grande importanza tecnica: quello dell'equilibrio degli archi molto ribassati (13).

Prendiamo in considerazione un arco reticolare del genere di quello rappresentato in figura 4. Per semplicità lo si è supposto simmetrico rispetto alla verticale in mezzeria. Il corrente superiore è rettilineo (e quindi orizzontale); l'inferiore disposto secondo una poligonale inscritta in un arco, sufficientemente teso, di parabola.

Tanto per fissar le idee, converremo che il corrente superiore abbia sezione retta costante, e che nel corrente inferiore la sezione retta vari cresciendo dalla mezzeria verso le imposte; e precisamente, che essa sia eguale a quella del corrente superiore nei primi due campi a partire dalla mezzeria, doppia nei due campi seguenti, tripla negli ultimi due attigui all'imposta.

Non staremo neppure a preciser le dimensioni delle aste di parete, la cui influenza su quel che verremo dicendo è, il più delle volte, trascurabile.

Supposto il carico simmetrico, e più precisamente uniformemente distribuito sui nodi del corrente superiore, il sistema presenta un doppio grado di iperstaticità.

È nelle consuetudini l'assumere, in questo caso, come incognite iperstatiche la spinta orizzontale H ed il momento M nella sezione in chiave.

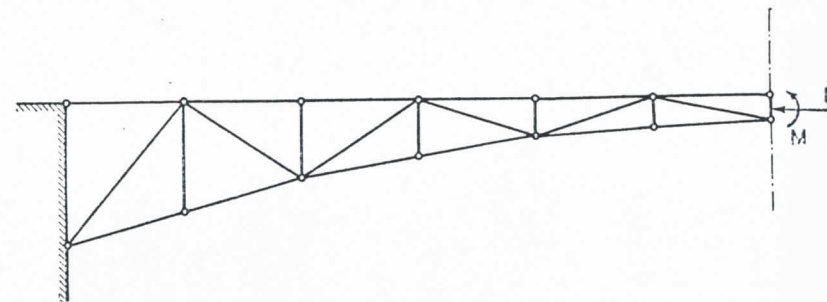


FIG. 4.

Si potranno allora scrivere due equazioni del tipo [29], le quali, posto

$$S = S_p + S_h H + S_m M \quad [33]$$

diverranno

$$\begin{aligned} \Sigma \frac{S_p S_h l}{EA} + H \Sigma \frac{S_h^2 l}{EA} + M \Sigma \frac{S_h S_m l}{EA} + \Sigma \bar{s} S_h &= 0 \\ \Sigma \frac{S_p S_m l}{EA} + H \Sigma \frac{S_h S_m l}{EA} + M \Sigma \frac{S_m^2 l}{EA} + \Sigma \bar{s} S_m &= 0 \end{aligned} \quad [34]$$

Ma S_p , S_h , S_m sono sforzi staticamente determinati, e si possono perciò immediatamente calcolare; in generale un tal calcolo si riduce al tracciamento di tre diagrammi Cremoniani.

Se pertanto si incomincia col supporre che le deformazioni plastiche $\bar{s}$ siano tutte nulle, le [34] si possono senz'altro risolvere rispetto

alle incognite H ed M; ed in funzione di queste si possono poi, mediante le [33], calcolare gli sforzi nelle diverse aste.

Ora supponiamo che da questo calcolo — perfettamente rientrante nell'ambito della teoria classica dell'elasticità — risulti che in una, o in due aste della travatura il limite di elasticità del materiale verrebbe sorpassato.

In conformità alle nostre premesse, noi dovremo allora ritenere che, in quelle aste, gli sforzi non potranno raggiungere effettivamente i valori indicati dal calcolo, ma si dovranno arrestare ai valori corrispondenti al limite di elasticità del materiale; dovremo inoltre tener presente che nelle aste stesse si manifesteranno delle deformazioni plastiche.

In una, o in due, delle espressioni [33] il primo membro verrà così ad esser noto: si potrà perciò valersene per far scomparire dalle [34] una o entrambe le incognite; dopo di che queste equazioni potranno venire utilizzate per la determinazione della, o delle, deformazioni plastiche.

* * *

Se si sa *a priori* in quali aste della travatura il fenomeno può avverarsi, si possono conseguire semplificazioni formali apprezzabili adottando come incognite iperstatiche gli sforzi X ed Y in quelle aste (fig. 5), ciò che equivale ad assumere come travatura principale un arco con cerniere in chiave (C) ed alle imposte (A).

Posto

$$S = S_p + S_x X + S_y Y \quad [35]$$

le [29] assumeranno la forma

$$\begin{aligned} \sum \frac{S_p S_x l}{EA} + X \sum \frac{S_x^2 l}{EA} + Y \sum \frac{S_x S_y l}{EA} + \sum \bar{s} S_x &= 0 \\ \sum \frac{S_p S_y l}{EA} + X \sum \frac{S_x S_y l}{EA} + Y \sum \frac{S_y^2 l}{EA} + \sum \bar{s} S_y &= 0 \end{aligned} \quad [36]$$

Supponiamo, per incominciare, che risolvendo queste equazioni rispetto alle incognite X ed Y per $\bar{s}$ tutte nulle, si trovi per una di quelle incognite, per esempio per X, un valore tale che, nella relativa asta, il limite di elasticità del materiale risulti sorpassato.

In luogo della X incognita si porrà allora in quelle equazioni un valore noto che designeremo con X_e ; vi comparirà in compenso come

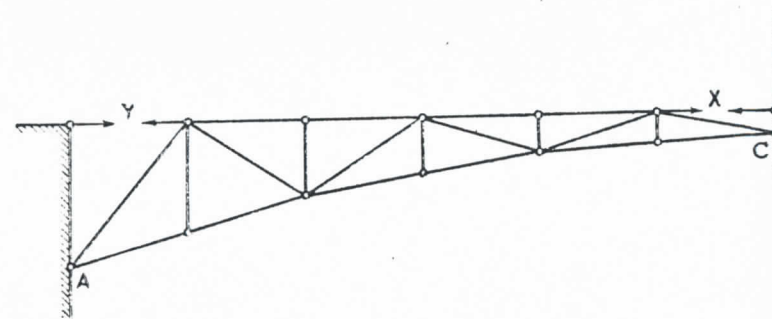


FIG. 5.

nuova incognita una delle $\bar{s}$, e precisamente la deformazione plastica nell'asta di cui si tratta, che denoteremo con $\bar{s}_x$.

Tenuto conto che tutte le altre $\bar{s}$ continuano ad esser nulle, e che il coefficiente di $\bar{s}_x$ riesce ovviamente eguale ad uno nella prima equazione ed eguale a zero nella seconda, le [36] si potranno scrivere sotto la forma

$$\begin{aligned} \sum \frac{S_p S_x l}{EA} + X_e \sum \frac{S_x^2 l}{EA} + Y \sum \frac{S_x S_y l}{EA} + \bar{s}_x &= 0 \\ \sum \frac{S_p S_y l}{EA} + X_e \sum \frac{S_x S_y l}{EA} + Y \sum \frac{S_y^2 l}{EA} &= 0 \end{aligned} \quad [37]$$

La seconda di queste equazioni si potrà subito risolvere rispetto ad Y (unica incognita iperstatica residua) e determinerà così la distribuzione degli sforzi nel nuovo stato di equilibrio; dopo di che ci potremo servire della prima equazione per calcolare la deformazione plastica $\bar{s}_x$ che, per raggiungere tale stato di equilibrio, ha dovuto verificarsi nell'asta sollecitata oltre il limite di elasticità.

Supponiamo ora che anche Y sia tale che, nella relativa asta, il limite di elasticità risulti sorpassato.

Una tale circostanza, si noti bene, può risultar già dalle [36] in regime di perfetta elasticità, o può verificarsi solo in un secondo tempo, cioè risultar dalle [37] come conseguenza della deformazione plastica $\bar{s}_x$. Nell'un caso come nell'altro la conclusione sarà la stessa: entrambe le incognite iperstatiche X ed Y verranno sostituite da valori noti X_e ed Y_e ; il che è quanto dire che il sistema degli sforzi risulterà senz'altro staticamente determinato.

Farà in compenso la sua comparsa, insieme con la $\bar{s}_x$, anche una $\bar{s}_y$, e le nuove equazioni a cui le [36] si riducono

$$\begin{aligned} \sum \frac{S_p S_x l}{EA} + X_e \sum \frac{S_x^2 l}{EA} + Y_e \sum \frac{S_x S_y l}{EA} + \bar{s}_x &= 0 \\ \sum \frac{S_p S_y l}{EA} + X_e \sum \frac{S_x S_y l}{EA} + Y_e \sum \frac{S_y^2 l}{EA} + \bar{s}_y &= 0 \end{aligned} \quad [38]$$

potranno venire utilizzate per la determinazione di queste due nuove incognite.

* * *

Questi successivi calcoli sono stati eseguiti nel caso concreto a cui si riferisce la già citata figura 5; ed i risultati che se ne ottennero si trovano indicati nelle figure che seguono.

Di queste la figura 6 si riferisce all'ipotesi della perfetta elasticità; vi si vede l'andamento caratteristico della curva delle pressioni; accanto alle singole aste dei due correnti si trovano d'altronde segnati i valori degli sforzi rispettivi (calcolati assumendo come unità di misura delle forze il carico applicato a ciascun nodo, e riferiti all'area della sezione retta del corrente superiore).

Si è poi fatta l'ipotesi che quest'area sia tale che il limite di elasticità del materiale venga raggiunto quando gli sforzi raggiungono le sei unità come sopra definite (restando, ben inteso, esclusa ogni qualsiasi eventualità di deformazione per carico di punta nelle aste compresse).

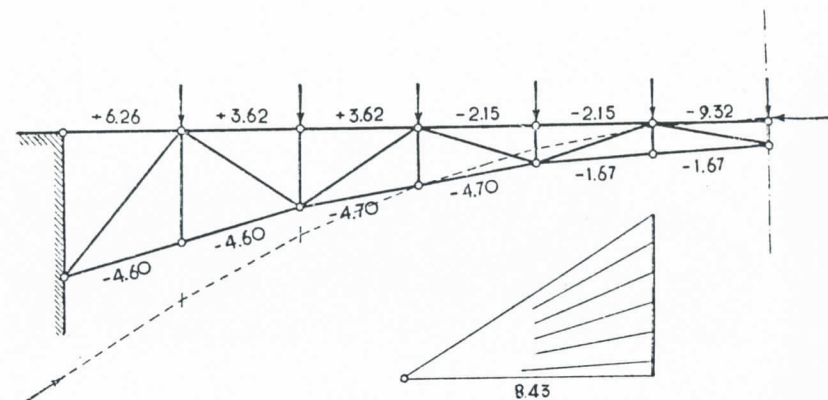


FIG. 6.

A questa ipotesi si riferiscono il nuovo andamento della curva delle pressioni e la nuova distribuzione di sforzi indicati nella figura 7, e realizzabili mediante le due deformazioni plastiche

$$\bar{s}_x = -12,36 \frac{l}{EA} \quad \bar{s}_y = +5,08 \frac{l}{EA}$$

Grazie a queste deformazioni plastiche, la curva delle pressioni si è sensibilmente abbassata in chiave, e sollevata per contro verso le imposte, accostandosi ovunque all'asse geometrico dell'arco; gli sforzi

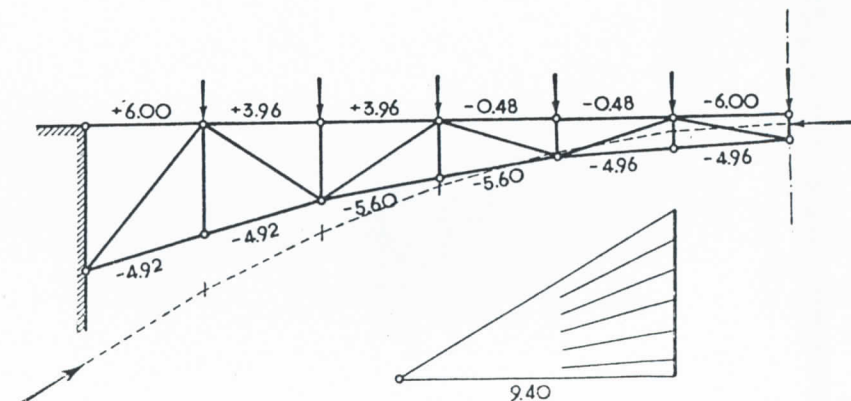


FIG. 7.

si sono in parte spostati dalle aste più sollecitate a quelle in cui la resistenza del materiale era meno impegnata.

In definitiva si è anche qui realizzata una migliore utilizzazione delle caratteristiche resistenti del materiale.

* * *

Immaginiamo ora che sull'arco si venga ad annullare la sollecitazione esterna.

Le deformazioni plastiche naturalmente permangono. Ne consegue uno stato di coazione, vale a dire una distribuzione di sforzi nelle singole aste, che si possono immediatamente calcolare, sia per differenza tra gli sforzi indicati in figura 7 e quelli indicati in figura 6, sia risolvendo a nuovo le equazioni [36] nell'ipotesi che tutte le S_p sian nulle e che le $\bar{s}$ abbiano i valori ormai noti.

Da questa distribuzione di sforzi, in equilibrio per forze esterne tutte nulle, si passa con tutta facilità al calcolo di quelle che, nel linguaggio corrente fra i tecnici, si chiamano le deformazioni permanenti dell'arco (20).

Il calcolo è rappresentato in figura 8.

Sullo schema della travatura, riprodotto in alto, si vedono indicati i valori delle deformazioni, sia plastiche che elastiche, delle singole aste, calcolati assumendo come unità di misura delle deformazioni il valore di

$$\frac{l}{EA}$$

relativo ad una (qualunque) asta del corrente superiore.

In base a queste deformazioni è stato poi tracciato il diagramma di Williot che si vede riprodotto in basso nella stessa figura; su di esso si possono leggere gli spostamenti dei singoli nodi; e fra gli altri, particolarmente interessante, lo spostamento (verticale) del nodo in mezz'aria, o, come si dice comunemente, la « freccia permanente » dell'arco.

* * *

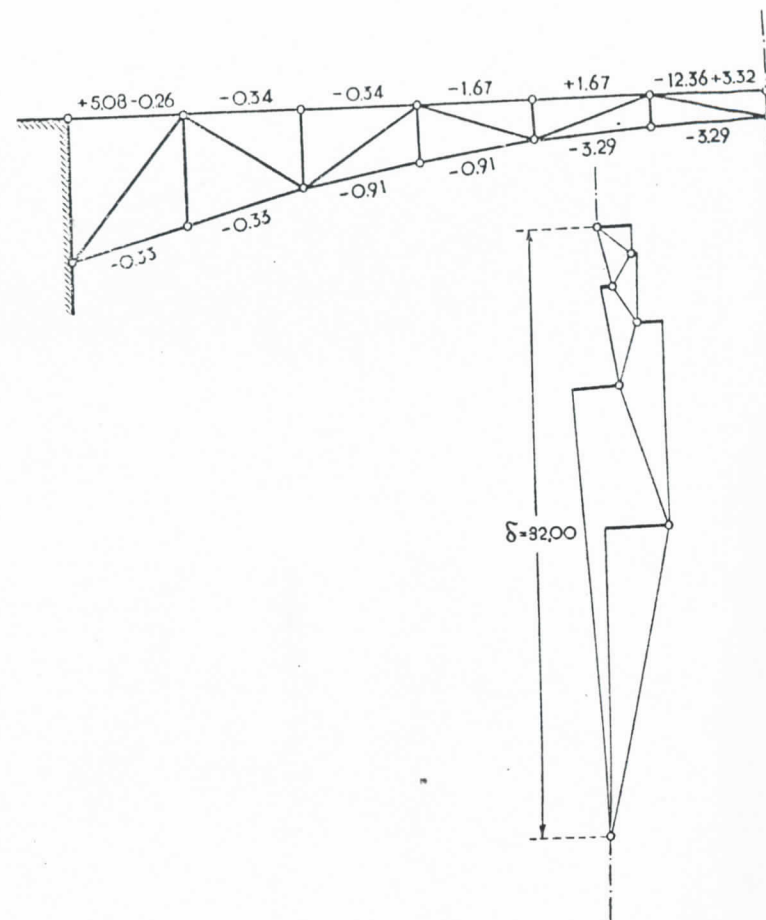


FIG. 8.

Al calcolo di questa « freccia permanente » si può per altro giungere direttamente se si applica il « secondo principio di reciprocità ».

Nel caso particolare delle travature reticolari questo principio si traduce infatti nella forma seguente:

Lo spostamento che un nodo di una travatura reticolare subisce in una data direzione, per effetto di un dato sistema di deformazioni plastiche $\bar{s}$ delle sue aste, è misurato da

$$\delta = \sum \bar{s} \cdot S'$$

dove con S' si sono indicati gli sforzi che, nelle stesse aste, verrebbero determinati da una forza

$$F' = 1$$

supposta applicata in quel nodo e secondo quella direzione.

In questa formola la sommatoria deve naturalmente intendersi estesa a tutte le aste; però in realtà essa si comporrà poi dei soli

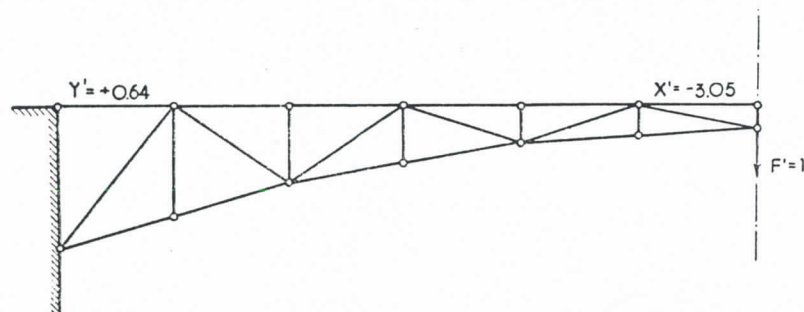


FIG. 9.

termini relativi alle aste sovrabbondanti, i soli in cui le $\bar{s}$ siano diverse da zero.

Ne segue che degli sforzi S' basterà in pratica calcolare quelli relativi alle stesse aste; cioè a dire le incognite iperstatiche X' ed Y' (fig. 9) in funzione delle quali lo spostamento cercato si potrà senz'altro scrivere sotto la forma

$$\delta = 2 (\bar{s}_x \cdot X' + \bar{s}_y \cdot Y')$$

Nel caso concreto — vale a dire per i valori ormai noti delle deformazioni plastiche, e per quelli delle incognite iperstatiche indicati in figura 9 — si trova per la freccia permanente il valore

$$\delta = 82,00 \frac{l}{EA}$$

che concorda perfettamente con quello fornito dal diagramma di Williot.

VII. — UN PROBLEMA TIPICO: IL CEMENTO ARMATO.

Il caso delle strutture in cemento armato è quello che alla teoria dell'equilibrio elasto-plastico offre più largo ed immediato campo di pratiche applicazioni.

Che nella statica delle costruzioni in cemento armato le deformazioni plastiche abbiano una importanza notevole — anzi addirittura una vera e propria funzione favorevole alla stabilità — era noto da tempo (14).

I tecnici più esperti ed arditi hanno sempre fatto un più o meno esplicito assegnamento sul fatto che l'intervento delle deformazioni plastiche del calcestruzzo tende a scaricare quelle parti della struttura che in regime elastico risulterebbero eccessivamente caricate, se vi sono altre parti di essa, inizialmente meno impegnate, in cui gli sforzi possano emigrare a beneficio della stabilità dell'insieme (1).

Basti ricordare un solo nome: quello di FRANCESCO HENNEBIQUE, indimenticabile pioniere delle costruzioni in cemento armato, alla cui singolare genialità intuitiva noi dobbiamo esempi mirabili di archi arditissimi che hanno ormai felicemente superata la prova del tempo.

Già fin dai suoi tempi l'HENNEBIQUE insegnava a disegnare le arcate sottili in chiave e presidiate alle reni ed alle imposte da strutture cellulari sovrapposte alla volta; e consigliava di ammettere da una parte che la sottigliezza della chiave, dando respiro e facoltà di adattamento alla struttura, tendesse a centrarvi lo sforzo, e dall'altra parte che la struttura d'imposta, tesa dal momento flettente d'incastro, riducesse il proprio compito alla reazione dei ferri, capaci anch'essi di adattamento quando questo riuscisse utile alla stabilità.

Insegnava inoltre a non frapporre eccessivi indugi al disarmo della struttura — indugi che una male intesa prudenza avrebbe potuto suggerire — e ciò nel dichiarato intento di realizzare gli opportuni adattamenti plastici durante quella fase dei fenomeni di presa in cui il conglomerato è meglio in grado di subirli senza danno.

(1) Cfr. A. DANUSSO, *Le autotensioni: spunti teorici ed applicazioni pratiche*, «Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano», vol. VIII, 1934.

Così alla sua scuola il progettista imparava a procedere per tentativi alla ricerca di quella fra le curve funicolari dei carichi che meglio si conciliasse colla stabilità dell'insieme; e ad accettarla, anche in deroga alle leggi della teoria classica dell'elasticità, ammettendo che, a rendere la soluzione possibile, provveda poi per conto suo la natura mediante l'adattabilità plastica dei materiali.

Procedimento arduo e che si comprende possa aver dato risultati brillanti quando venne impiegato da uomini dotati di un profondo e sicuro intuito di quel che la natura può, e di quel che non può dare.

Ma è ben evidente che un tale procedimento non può diventare di uso corrente se non si è in grado di renderlo razionale, subordinando la scelta della configurazione risolvibile, nella classe delle configurazioni equilibrate, ad un'analisi precisa delle deformazioni plastiche che effettivamente si producono nella struttura.

Solo oggi noi siamo in grado di precisare, in ogni singolo caso concreto, l'entità di queste deformazioni plastiche, e quindi di assicurarci che il materiale le possa, senza inconvenienti, sopportare.

* * *

A tal fine giova precisare bene, una volta per tutte, quelle che sono le proprietà caratteristiche di elasticità e di resistenza dei calcestruzzi (17).

Ora sperimentando a trazione od a compressione su prismi di calcestruzzo si riscontra che la relazione tra le tensioni unitarie e le deformazioni unitarie corrispondenti si può rappresentare graficamente con un diagramma del genere di quello disegnato in figura 10.

In esso le tensioni sono state rappresentate sull'asse (verticale) delle ordinate, positive verso l'alto, negative verso il basso; le deformazioni sull'asse (orizzontale) delle ascisse, positive verso destra, negative verso sinistra.

Il ramo della curva che si riferisce alle sollecitazioni negative (compressioni) si può, per un lungo tratto e con notevole approssimazione, confondere con una retta uscente dall'origine degli assi.

Quello invece che si riferisce alle sollecitazioni positive (trazioni), pur dipartendosi dall'origine con la stessa inclinazione dell'altro, presenta assai presto — vale a dire per valori ancor piccoli della solle-

citazione — una brusca deviazione, e tende ad assumere un andamento sensibilmente parallelo all'asse delle deformazioni ⁽¹⁾.

Volendo pertanto schematizzare in qualche modo il fenomeno, nasce spontanea l'idea di rappresentarlo in via di approssimazione con una bilatera: un lato della quale, passante per l'origine, e valido per tutte le sollecitazioni negative nonché per quelle positive inferiori ad un limite ben determinato, starebbe a rappresentare la *fase elastica*; mentre

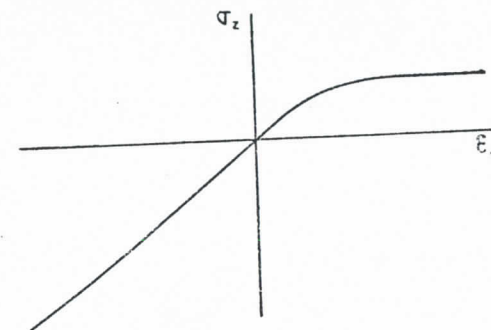


FIG. 10.

il secondo lato, parallelo all'asse delle deformazioni, epperò immagine di deformazioni indefinitamente crescenti sotto carico costante, starebbe a rappresentare la *fase plastica* del fenomeno.

Occorre appena avvertire che il vertice della bilatera corrisponde a quello che noi usiam designare col nome di *limite di elasticità* del materiale alla trazione.

* * *

Immaginiamo ora che uno di quei prismi venga sollecitato a flessione, semplice ovvero combinata con una trazione o con una compressione.

⁽¹⁾ Se il calcestruzzo non è armato quest'ultima fase del fenomeno è per verità appena accennata, poichè interviene ben presto la rottura. Ma se il prisma è opportunamente armato, il calcestruzzo diviene capace di sopportare, prima di rompersi, deformazioni molto maggiori, ed anche questa fase del fenomeno diviene osservabile senza difficoltà.

Teoria ed esperienza sono assolutamente d'accordo nell'affermare che si verifica la legge della conservazione delle sezioni piane ⁽¹⁾.

Ciò è quanto dire che, se si assumono come ascisse le distanze dei singoli elementi di una sezione retta dal relativo asse neutro, e si riportano come ordinate le corrispondenti deformazioni totali, si deve ottenere come diagramma una retta passante per l'origine.

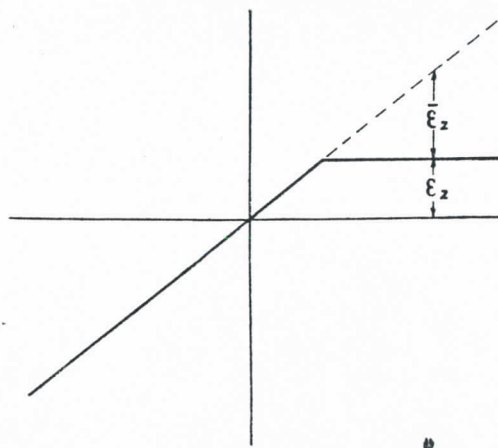


FIG. 11.

Ma, per quel che si è detto poc'anzi, un tale diagramma può essere, con un semplice cambiamento di scala, interpretato anche come diagramma delle tensioni, in tutta quella porzione della sezione in cui vige il regime elastico; mentre nella rimanente porzione, in cui vige il regime plastico, le tensioni debbono evidentemente mantenersi costanti.

Ecco così ripresentarsi la bilatera di cui abbiamo già parlato (fig. 11) nella veste di diagramma complessivo delle tensioni sulla sezione della trave inflessa.

⁽¹⁾ Dal punto di vista teorico il problema è stato già da noi trattato nel cap. IV. Dal punto di vista sperimentale basti citare: F. EMPERGER, *Handbuch für Eisenbetonbau* (Dritte Auflage), Erster Band (Berlin, 1921), pag. 158 ss.

Che se, dalla scala delle tensioni, si ritorna alla scala delle deformazioni, la stessa bilatera dovrà considerarsi come rappresentativa delle deformazioni elastiche

$$\epsilon_z$$

che per definizione son sempre proporzionali alle tensioni; mentre l'area triangolare compresa fra i due lati della bilatera nella regione a regime plastico, dovrà in conseguenza interpretarsi come diagramma delle deformazioni plastiche

$$\bar{\epsilon}_z$$

Resta ben inteso che, nel caso in cui il calcestruzzo sia armato, la sezione metallica deve, nelle ordinarie condizioni di sollecitazione, venir considerata tutta come facente parte di quella porzione della sezione in cui vige il regime elastico.

Per essa vale quindi il solo primo lato della bilatera, poichè per essa deformazioni elastiche e deformazioni totali coincidono. Ed è perciò esclusivamente sul primo lato della bilatera che si dovranno leggere le tensioni nei ferri dell'armatura, in quella scala che il diverso valore del modulo naturalmente comporta.

* * *

Con queste semplici premesse la soluzione del problema dell'equilibrio elasto-plastico riesce, in ogni singolo caso particolare, completamente individuata (17).

Incominciamo — per ragioni che appariranno chiare più innanzi — dal caso della presso-flessione.

Supponiamo cioè data la forza N normale alla sezione, nonchè il suo punto di applicazione C (centro di sollecitazione) su uno degli assi principali centrali d'inerzia, che, per semplicità, riterremo asse di simmetria della sezione (fig. 12).

Ammetteremo che la sollecitazione così definita sia tale da determinare nel calcestruzzo delle tensioni positive superanti il limite di elasticità, sì da dar luogo alla produzione di deformazioni plastiche.

Si tratta per prima cosa di delimitare la zona in cui queste deformazioni plastiche si producono, e precisamente di trovare la posizione

della retta xx che separa la porzione di sezione in cui vige il regime elastico da quella in cui vige il regime plastico.

Ora su quest'ultima regione noi abbiamo già detto che le tensioni debbon riuscire costanti ed eguali al limite di elasticità alla trazione del calcestruzzo.

Immaginiamo pertanto di poter sovrapporre allo stato di tensione incognito che stiamo studiando una distribuzione ausiliaria di tensioni,

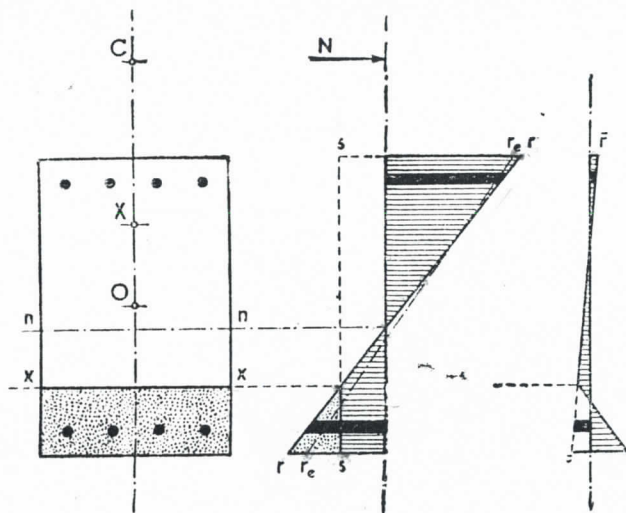


FIG. 12.

uniformemente ripartite su tutta la sezione con intensità precisamente eguale a quel limite cambiato di segno; la tensione risultante dovrà, su tutta la regione a regime plastico, riuscire identicamente nulla. Sulla porzione di sezione in cui vige il regime elastico si avrà invece una distribuzione lineare di tensioni con intensità, su ciascun elemento di area, proporzionale alla distanza dell'elemento stesso dall'asse xx .

Ma questa distribuzione di tensioni deve avere per risultante la risultante della sollecitazione esterna applicata in C e della distribuzione ausiliaria, la quale equivale ovviamente ad una forza nota applicata al baricentro O della sezione.

Il punto di applicazione X di questa risultante — che noi possiamo immediatamente determinare in funzione di O e di C — dovrà

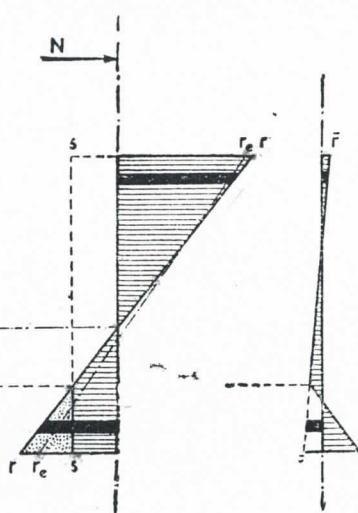


FIG. 13.

dunque essere il centro delle forze momenti statici, o, se si preferisce l'antipolo della retta xx rispetto all'ellisse centrale di inerzia, di quella porzione di sezione (limitata da xx stessa) in cui vige il regime elastico.

Ciò che consente l'immediata determinazione di xx con procedimenti grafici noti ⁽¹⁾.

Delimitata così la regione a regime elastico, si potrà facilmente calcolare il valor medio della tensione su di essa; tenuto conto che tale valore medio deve coincidere col valore locale in corrispondenza del baricentro della regione stessa, si potrà senz'altro definire la posizione del primo lato rr' della bilatera per rapporto al secondo lato ss' , la cui posizione rispetto alla fondamentale del diagramma è nota dacchè è stato fissato il limite di elasticità a trazione del calcestruzzo.

Resta così anche definita la posizione dell'asse neutro nn .

Messa poi da parte la sollecitazione ausiliaria, e considerata la bilatera come riferita direttamente alla predetta fondamentale, si hanno subito i diagrammi che ci interessano: quello (tratteggiato) delle deformazioni elastiche, e quindi anche delle tensioni, nel calcestruzzo; quello (in nero pieno) delle deformazioni, e quindi anche delle tensioni, nel ferro; e finalmente quello (punteggiato) delle deformazioni plastiche nel calcestruzzo.

Da questi diagrammi appare come la limitazione imposta ai valori positivi delle ϵ_z (e quindi anche delle σ_z) nel calcestruzzo, porti necessariamente con sè un più o meno accentuato spostamento dell'asse neutro verso il lembo compresso della sezione, nonchè un congruo aumento del valore massimo (negativo) della tensione unitaria in corrispondenza del detto lembo.

Questi tre fatti — e cioè: la riduzione della tensione massima positiva nel calcestruzzo, lo spostamento dell'asse neutro e l'aumento della tensione massima negativa — sono stati da tempo accertati sperimentalmente. Erano anzi stati osservati assai prima che si fosse in grado di dare di essi una spiegazione razionale.

Basti ricordare qui le classiche esperienze eseguite da BACH e GRAF nel « Materialprüfungsanstalt » della Technische Hochschule di Stuttgart

⁽¹⁾ Cfr. C. GUIDI, *Lezioni sulla scienza delle costruzioni (Le costruzioni in beton armato)*, Torino (ediz. Bona).

e riportate nell'*Handbuch* dell'EMPERGER ⁽¹⁾. Esse costituiscono la più bella riprova della singolare fedeltà con cui queste nostre deduzioni teoriche rispecchiano ed interpretano il fatto sperimentale.

* * *

La stessa bilatera, riferita invece alla retta $r_e r_c$ (diagramma delle deformazioni, e quindi anche delle tensioni, nella ipotesi della perfetta elasticità), ci dà il diagramma delle deformazioni elastiche, e quindi anche delle tensioni, residue per forze esterne tutte nulle.

Questo diagramma, riprodotto a parte in figura 13, ci offre una rappresentazione quanto mai suggestiva dello stato di coazione che le deformazioni plastiche hanno determinato nella trave.

Su di esso è da segnalare la caratteristica inversione di segno delle deformazioni elastiche (e quindi anche delle tensioni) che, al cessare della sollecitazione esterna, si manifesta nel calcestruzzo — e precisamente là dove esso ha subite le maggiori deformazioni plastiche — mentre nel ferro, che si è comportato elasticamente anche quando ha dovuto prender su di sé le maggiori tensioni, permane invece uno stato di tensione residuo.

Anche questo fatto era stato da molto tempo rilevato sperimentalmente.

Basti ricordare le prime esperienze eseguite a Losanna fin dal 1894 (mettendo a nudo in alcuni punti le sbarre di ferro per rilevarne direttamente le deformazioni con un apparecchio Frankel) e ripetute a Zurigo nel 1902 dal SCHÜLE con precauzioni anche maggiori ed usando per le misure di deformazioni sensibilissimi apparecchi a specchi ⁽²⁾.

Si poté così assodare che in una trave inflessa i ferri dell'armatura manifestano una considerevole persistenza nella tensione cui sono stati assoggettati, anche quando il carico applicato venga in tutto od in parte soppresso.

⁽¹⁾ « Mitt. über Forschungsarbeiten », 1914 (Heft 116 bis 169) ovvero anche: F. EMPERGER, *Handbuch für Eisenbetonbau*, Erster Band, II Kap. (O. GRAF, *Versuche mit Eisenbetonkörpern die durch Biegung und Achsialdruck belastet wurden*).

⁽²⁾ F. SCHÜLE, *Résistance et déformations du béton armé sollicité à la flexion*, Schweizerische Bauzeitung, 1902.

In questo stato di tensione residuo del ferro — e nella conseguente inversione di segno delle tensioni nel calcestruzzo — bisogna cercare la spiegazione del fatto, notissimo, che, al ripristinarsi della primitiva sollecitazione esterna, nessuna nuova deformazione plastica si manifesta, ed il comportamento del materiale si rivela ovunque e perfettamente conforme alle leggi della elasticità.

* * *

Dal caso della presso-flessione si deducono naturalmente come casi particolari quelli della sollecitazione a solo sforzo normale od a solo momento flettente.

Basta evidentemente supporre che il momento flettente si annulli; o che si annulli lo sforzo normale (più precisamente che N diventi, come si suol dire, infinitamente piccola e lontana); nel primo caso C viene a coincidere col baricentro O della sezione; nell'altro caso esso si porta nel punto all'infinito dell'asse di sollecitazione.

Bisogna ben tener presente però che, a differenza di quel che accade nella teoria classica dell'elasticità, qui non è affatto detto che si debba con ciò necessariamente ricadere nel primo, o rispettivamente nel secondo, caso particolare di DE SAINT-VENANT.

Noi abbiamo infatti a suo tempo riconosciuto che, perchè nello studio dell'equilibrio elasto-plastico di un prisma o di un cilindro, si possa parlare di estensione semplice o di semplice flessione, non basta che la sollecitazione si riduca ad uno sforzo normale baricentrico o ad un momento flettente, ma occorre anche che le deformazioni plastiche soddisfino rispettivamente alla prima od alla seconda delle due condizioni seguenti:

$$\int_A \bar{\epsilon}_z y dA = 0$$

$$\int_A \bar{\epsilon}_z dA = 0$$

Ora nel caso del cemento armato queste due condizioni non si trovano quasi mai verificate; e ciò perchè il limite di elasticità viene raggiunto dal calcestruzzo nella zona tesa quando lo stesso calcestruzzo nella zona compressa, ed il ferro (dovunque si trovi), si comportano ancora come perfettamente elastici.

Accade così che, anche quando è diversa da zero una sola delle componenti della sollecitazione, lo stato di deformazione del solido presenta le caratteristiche di una combinazione di una estensione con una flessione.

Più precisamente accade che accanto alla deformazione elastica ridotta alla sola estensione

$$\frac{N}{EA}$$

od alla sola flessione

$$\frac{M}{EJ}$$

coesistono una estensione plastica

$$\bar{\lambda} = \frac{\int_A \bar{\epsilon}_z dA}{A} \quad [39]$$

ed una flessione plastica

$$\bar{\mu} = \frac{\int_A \bar{\epsilon}_z y dA}{J} \quad [40]$$

che riportano praticamente il problema al caso composto della pressoflessione su cui noi abbiamo, appunto per ciò, fermata dapprima la nostra attenzione.

* * *

Vogliamo ora fare un breve accenno al caso in cui alla sollecitazione a flessione va unita una sollecitazione al taglio (17).

Noi sappiamo già che dal punto di vista teorico le cose si complicano grandemente.

In pratica però, e finchè si ha soltanto per iscopo di farsi un'idea della legge di ripartizione delle tensioni tangenziali, nulla ci vieta di orientarci verso il calcolo dei valori medii di queste tensioni, e di adottare quei medesimi procedimenti di approssimazione che hanno trovato così largo impiego nella ordinaria teoria della resistenza dei materiali.

Siano pertanto SS ed S'S' due sezioni rette vicinissime della trave che vogliamo studiare (fig. 14).

Supporremo naturalmente che sul tronco di trave compreso tra quelle due sezioni non sia applicata alcuna forza esterna.

Ciò posto, immaginiamo tracciata sulla sezione SS una corda generica parallela all'asse neutro, e per essa condotto il piano parallelo all'asse z fino ad incontrare la sezione S'S'.

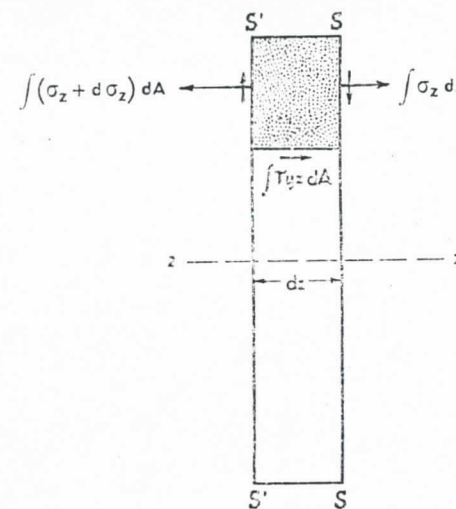


FIG. 14.

Per l'equilibrio della porzione di solido limitata da questo piano e dalle due sezioni rette considerate, deve, fra l'altro, essere verificata l'equazione che si ottiene eguagliando a zero la somma delle proiezioni di tutte le forze sull'asse z

$$\int (\sigma_z + d\sigma_z) dA - \int \sigma_z dA = \int \tau_{yz} dA$$

dove i due integrali al primo membro si intendono naturalmente estesi a quella porzione della sezione retta che la corda considerata delimita, mentre l'integrale al secondo membro va invece esteso all'area della sezione longitudinale: area rettangolare che ha per lati la lunghezza b della corda e la distanza dz delle due sezioni.

Se pertanto si conviene di indicare con

$$\tau_{yz} \text{ media}$$

il valor medio della tensione tangenziale τ_{yz} su questa area (o, al limite, sulla corda a cui quest'area tende per dz tendente a zero) si ha

$$\tau_{yz} \text{ media} = \frac{1}{b} \int \frac{d\sigma_z}{dz} dA$$

In pratica le due sezioni rette SS ed $S'S'$ si supporranno a distanza unitaria, l'unità di misura restando, ben inteso, in nostro arbitrio, e potendo quindi, in ciascun caso concreto, venir scelta tanto piccola quanto lo richiede il grado di approssimazione che si vuole raggiungere.

Detti M ed M' i momenti flettenti relativi a quelle due sezioni, si tracceranno coi metodi dianzi illustrati i corrispondenti diagrammi delle σ_z e, per differenza, se ne dedurrà il diagramma approssimato (fig. 15) delle

$$\frac{d\sigma_z}{dz}$$

in base al quale si procederà, per integrazione, al calcolo della $\tau_{yz} \text{ media}$ per un numero opportuno di posizioni della corda.

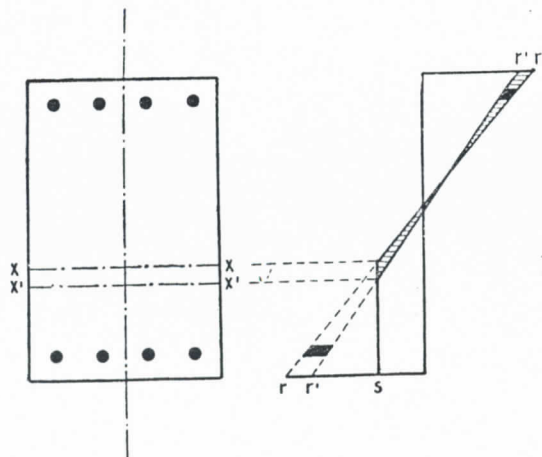


FIG. 15.

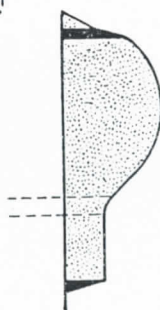


FIG. 16.

Si otterrà così la legge di variazione di questa $\tau_{yz} \text{ media}$ sulla sezione, sotto forma di un diagramma del genere di quello rappresentato (punteggiato) in figura 16.

Dal quale diagramma sembra, generalmente, lecito arguire:

1) che in corrispondenza delle regioni a regime plastico, dove $d\sigma_z = 0$, la tensione tangenziale media (a pari valori di b) assume valori costanti;

2) che la corda per cui la tensione tangenziale media (sempre a pari valori di b) assume il valore massimo, si scosta dal baricentro tanto più quanto più estesa è la regione in cui le deformazioni plastiche si sono verificate.

VIII. — NUOVI ORIENTAMENTI DELLA TEORIA DELLE TRAVI E DEGLI ARCHI.

È noto che la teoria delle travi inflesse si fonda tutta sulla possibilità di integrazione della equazione approssimata della deformata dell'asse geometrico (2)

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -\mu \quad [41]$$

dove μ rappresenta la curvatura, che in regime di perfetta elasticità vale

$$\frac{M}{EJ}$$

Ora, se si mantengono immutate tutte le convenzioni in uso — relativamente alla scelta degli assi di riferimento, ai segni delle rotazioni e dei momenti, ed all'approssimazione che si vuole raggiungere — nulla ci vieta di continuare a scrivere l'equazione differenziale della deformata dell'asse geometrico della trave sotto la medesima forma, a condizione che noi teniam conto, oltrechè della curvatura elastica, anche della curvatura plastica [40]

$$\bar{\mu} = \frac{\int_A \bar{\epsilon}_z y dA}{J}$$

e che perciò, nella equazione dianzi scritta, poniamo

$$\mu = \frac{M}{EJ} + \bar{\mu} \quad [42]$$

Ne segue che se la legge di variazione di questa curvatura totale è nota, la deformata dell'asse geometrico della trave si potrà sempre dedurre graficamente, considerando il diagramma delle curvature come un diagramma ideale di carico e costruendo il relativo poligono funicolare (2).

Ma un fatto nuovo interviene qui, che merita tutta la nostra attenzione; e consiste in ciò, che, introducendo la considerazione di deformazioni plastiche che permangono al cessare della sollecitazione, noi non abbiamo soltanto rinunciato alla elasticità del fenomeno, ma anche alla classica *proporzionalità* tra sollecitazione e deformazione (19).

Per mostrare l'importanza ed il significato di questo fatto nuovo, e per far vedere come esso si presti bene alla interpretazione dei risultati sperimentali, mi riferirò ad una, scelta a caso, tra le tante esperienze su travi in cemento armato che BACH e GRAF hanno eseguite, or sono ormai più di vent'anni, nel « Materialprüfungsanstalt » della Technische Hochschule di Stuttgart (1).

Si tratta di una trave semplicemente inflessa, a sezione quadrata di cm. 30 di lato, armata lungo la faccia tesa con 6 tondini (equidistanti) di 17 mm. di diametro.

La parte dell'esperienza di cui intendiamo qui occuparci è quella che si riferisce al periodo che precede la comparsa delle prime lesioni; e ne riportiamo la documentazione direttamente dall'*Handbuch* dell'EMPERGER.

Momento flettente applicato kg. cm.	Curvatura rilevata sperimentalmente cm. ⁻¹
30.000	0,132 × 10 ⁻⁵
60.000	0,273
90.000	0,423
120.000	0,582
150.000	0,749
180.000	0,980

(1) « Deutschen Ausschusses für Eisenbeton », Heft 38 (1917). Cfr. anche: F. EMPERGER, *Handbuch für Eisenbetonbau*, Erster Band (Dritte Auflage, Berlin, 1921), II Kap.; *Beziehungen zwischen Formänderungswinkel und Biegemoment* (pag. 168 ss.).

BACH e GRAF hanno cercato di mettere in relazione questi valori della curvatura, rilevata sperimentalmente, con quelli calcolati nella ipotesi che la intiera sezione reagisca elasticamente, ricorrendo al solito artificio di far variare in modo opportuno il rapporto dei moduli di elasticità dei due materiali componenti; ma l'accordo così ottenuto è soltanto apparente, ed in ogni caso necessariamente limitato a campi di valori relativamente ristretti.

La realtà è ben altra: l'esperienza accusa chiaramente un andamento non lineare del fenomeno, e la teoria classica dell'elasticità non può e non potrà mai in alcun modo interpretarlo.

Un'interpretazione soddisfacente si ottiene invece se — pur mantenendo al fenomeno elastico la caratteristica fondamentale della linearità — si introduce la considerazione delle deformazioni plastiche ammettendo al solito che esse intervengano, e si sovrappongano alle deformazioni elastiche; là dove i limiti di elasticità del materiale vengono raggiunti (15).

A tal fine occorre preliminarmente distinguere quei valori della sollecitazione per cui le leggi della elasticità si possono ragionevolmente ritenere verificate; da quelli per cui è fuor di dubbio l'intervento delle deformazioni plastiche.

Consideriamo per esempio il primo dei valori del momento flettente

$$M = 30.000 \text{ kg. cm.}$$

Per questo valore della sollecitazione le tensioni unitarie massime sul contorno della sezione assumono rispettivamente i valori

$$\sigma'_z = \frac{My'}{J} = + 5 \text{ kg./cm.}^2$$

e

$$\sigma''_z = \frac{My''}{J} = - 6 \text{ kg. cm.}^2$$

per i quali si può con tutta tranquillità ammettere che il materiale si comporti ovunque come perfettamente elastico, realizzando una distribuzione lineare di tensioni interne qual'è quella che, per il detto valore del momento flettente, si vede indicata in figura 17.

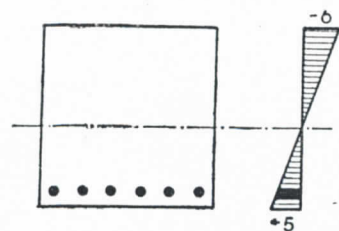


FIG. 17.

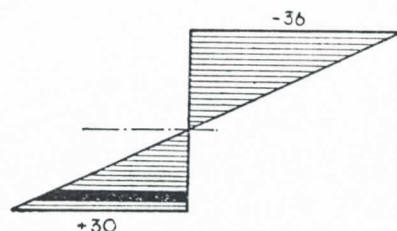


FIG. 18.

In queste condizioni l'accordo tra la teoria e l'esperienza si ottiene attribuendo al calcestruzzo il modulo

$$E = 280 \text{ t./cm.}^2$$

ciò che — dato che il modulo del ferro si mantiene sempre molto prossimo alle 2100 t./cm.² — equivale ad assumere, per il rapporto dei moduli, il valore

$$n = 7,5$$

Così facendo si trova infatti per la curvatura il valore

$$\frac{M}{EJ} = 0,132 \times 10^{-5} \text{ cm.}^{-1}$$

che coincide esattamente con quello rilevato sperimentalmente.

Prendiamo per contro in considerazione l'ultimo dei valori del momento flettente contemplati nella tabella:

$$M = 180.000 \text{ kg. cm.}$$

Secondo la teoria dell'elasticità le tensioni massime sul contorno della sezione dovrebbero in questo caso rispettivamente raggiungere i valori unitarii

$$\sigma'_z = \frac{My'}{J} = +30 \text{ kg./cm.}^2$$

$$\sigma''_z = \frac{My''}{J} = -36 \text{ kg./cm.}^2$$

come nel diagramma tracciato in figura 18; ora il primo di quei valori è notoriamente inammissibile.

Bisogna quindi necessariamente ammettere che, là dove le tensioni positive hanno superato un certo limite, il calcestruzzo sia passato al regime delle deformazioni elastiche a quello delle deformazioni plastiche.

L'accordo tra la nuova espressione della curvatura [42]

$$\mu = \frac{M}{EJ} + \bar{\mu}$$

e l'esperienza, si potrà ottenere — senza variare il valore già attribuito al modulo — assumendo come diagramma delle deformazioni plastiche (in funzione delle y) un diagramma triangolare del tipo di quello puramente elastico tracciato in figura 19.

Per una tale distribuzione di $\bar{\epsilon}_z$ si ha infatti

$$\bar{\mu} = 0,188 \times 10^{-5} \text{ cm.}^{-1}$$

Tenuto conto che

$$\frac{M}{EJ} = 0,792 \times 10^{-5} \text{ cm.}^{-1}$$

si ritrova così il valore della curvatura rilevato sperimentalmente

$$\mu = 0,980 \times 10^{-5} \text{ cm.}^{-1}$$

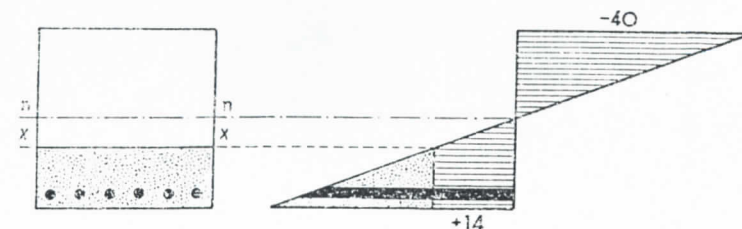


FIG. 19.

Il diagramma delle tensioni interne assume l'andamento indicato tratteggiato nella stessa figura 19. Esso presenta in tutta la regione interessata dalle deformazioni plastiche un'ordinata costante pari a

$$+ 14 \text{ kg./cm.}^2$$

La tensione massima negativa, in corrispondenza del bordo opposto della sezione, è naturalmente cresciuta in conseguenza da -36 a

$$- 40 \text{ kg./cm.}^2$$

A questo punto, nulla ci vieta di trattare alla stregua di questi risultati i casi intermedi, ammettendo che anche per essi il regime plastico si sostituisca a quello della perfetta elasticità ovunque le tensioni positive nel calcestruzzo raggiungano il limite di

$$+ 14 \text{ kg./cm.}^2$$

Si ottengono così i risultati seguenti:

Momento flettente applicato	Curvatura elastica $\frac{M}{EJ}$	Curvatura plastica $\bar{\mu}$	Curvatura totale μ
kg. cm.	cm. ⁻¹	cm. ⁻¹	cm. ⁻¹
30.000	$0,132 \times 10^{-5}$	0	$0,132 \times 10^{-5}$
60.000	0,264	0	0,264
90.000	0,396	$0,020 \times 10^{-5}$	0,416
120.000	0,528	0,052	0,580
150.000	0,660	0,112	0,772
180.000	0,792	0,188	0,980

La concordanza di questi risultati coi valori della curvatura rilevati sperimentalmente è veramente notevole; il divario non supera in nessun caso il 3%.

Ciò appare anche più chiaramente nella figura 20 in cui i risultati sperimentali di BACH e GRAF sono stati riportati in scala in presenza

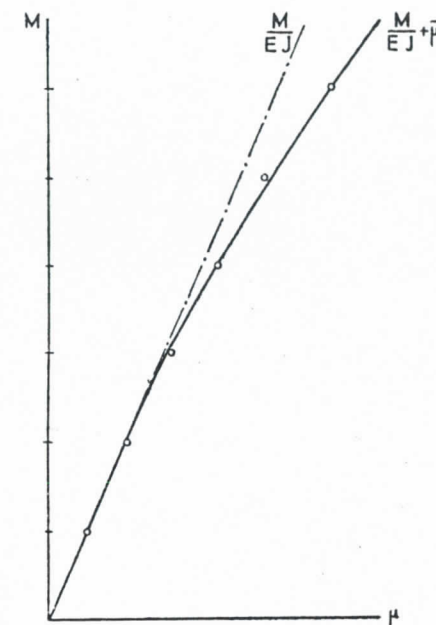


FIG. 20.

della curva che rappresenta graficamente la legge di variazione della curvatura totale [42]

$$\mu = \frac{M}{EJ} + \bar{\mu}$$

in funzione del momento flettente applicato.

* * *

Ma il fatto nuovo di cui ci stiamo occupando — vale a dire la non linearità delle relazioni che, in regime plastico, intercedono tra sollecitazione e deformazione — acquista una importanza tutta particolare se, dalla considerazione di una semplice trave staticamente determinata, si passa alla considerazione dei sistemi iperstatici.

Prendiamo per esempio il problema classico dell'arco incastrato (14).

Naturalmente, date le finalità esclusivamente dimostrative di questo accenno, guarderemo al problema nei suoi termini più semplici.

Supporremo perciò:

1) che tanto l'arco come le forze ad esso applicate ammettano un piano (verticale) di simmetria, nel quale stia l'asse geometrico s ;

2) che l'arco sia poi anche simmetrico rispetto ad un piano (verticale) normale al precedente; pur potendo essere, rispetto a tale piano, dissimmetriche le forze applicate;

3) che lo stato di tensione in una sezione generica dell'arco sia caratterizzato dalla tensione normale σ_z ; o, ciò che fa lo stesso, che gli effetti dello sforzo di taglio si possano ovunque trascurare a fronte di quelli dello sforzo normale e del momento flettente;

4) che le eventuali deformazioni plastiche si possano alla lor volta caratterizzare mediante la sola componente $\bar{\varepsilon}_z$: o, ciò che fa lo stesso, che a fronte degli effetti di questa componente si possano trascurare gli effetti delle componenti $\bar{\gamma}$.

S'intende che noi abbiamo qui implicitamente ammesso che tensioni e deformazioni, sulla sezione generica, continuino ad esser riferite alla solita terna di assi x, y, z coincidenti rispettivamente coi due assi principali centrali d'inerzia della sezione e colla normale condotta per il suo baricentro.

Ciò però non sarà più naturalmente possibile quando si tratterà di rappresentare lo stato di tensione o di deformazione dell'arco considerato nel suo insieme. Adotteremo allora come assi di riferimento gli assi ξ ed η della elisse degli spostamenti elastici terminali (assi principali centrali d'inerzia dei sistemi dei pesi elastici secondo CULMANN).

In conseguenza assumeremo come incognite iperstatiche le due componenti H e V della reazione di una delle imposte, per esempio dell'imposta sinistra, prese queste componenti secondo i predetti assi, ed il momento M della stessa reazione per rapporto all'origine (baricentro elastico dell'arco).

Così stando le cose — e con tutte le riserve che la teoria di DE SAINT-VENANT notoriamente comporta — l'espressione che per l'equilibrio si deve render minima si potrà nel caso concreto scrivere sotto la forma

$$\Phi + \int_V \bar{\varepsilon}_z \sigma_z dV$$

dove

$$\Phi = \int_s \frac{N^2 ds}{2EA} + \int_s \frac{M^2 ds}{2EJ}$$

e

$$\begin{aligned} \int_V \bar{\varepsilon}_z \sigma_z dV &= \int_s \left[\frac{N}{A} \int_A \bar{\varepsilon}_z dA + \frac{M}{J} \int_A \bar{\varepsilon}_z y dA \right] ds \\ &= \int_s \bar{\lambda} N ds + \int_s \bar{\mu} M ds \end{aligned}$$

Le tre equazioni che definiscono i valori delle tre incognite iperstatiche nello stato di equilibrio considerato saranno pertanto le seguenti:

$$\int_s N \frac{\partial N}{\partial H} \frac{ds}{EA} + \int_s M \frac{\partial M}{\partial H} \frac{ds}{EJ} + \int_s \bar{\lambda} \frac{\partial N}{\partial H} ds + \int_s \bar{\mu} \frac{\partial M}{\partial H} ds = 0$$

$$\int_s N \frac{\partial N}{\partial V} \frac{ds}{EA} + \int_s M \frac{\partial M}{\partial V} \frac{ds}{EJ} + \int_s \bar{\lambda} \frac{\partial N}{\partial V} ds + \int_s \bar{\mu} \frac{\partial M}{\partial V} ds = 0$$

$$\int_s N \frac{\partial N}{\partial M} \frac{ds}{EA} + \int_s M \frac{\partial M}{\partial M} \frac{ds}{EJ} + \int_s \bar{\lambda} \frac{\partial N}{\partial M} ds + \int_s \bar{\mu} \frac{\partial M}{\partial M} ds = 0$$

Ora, dette ξ ed η le coordinate del baricentro della sezione generica, e ϑ l'angolo che la direzione della normale z alla sezione (riverso l'interno della porzione di arco che fa capo all'imposta destra) fa colla direzione positiva dell'asse delle ξ , lo sforzo normale ed il momento flettente nella sezione stessa si possono rispettivamente scrivere sotto la forma

$$N = N_0 - H \cos \vartheta + V \sin \vartheta$$

$$M = M_0 + H\eta + V\xi + M$$

dove N_0 ed M_0 rappresentano rispettivamente lo sforzo normale e momento flettente che, nella sezione considerata, si verificherebbero per la data condizione di carico, qualora l'arco fosse momentaneamente liberato dall'incastro sinistro.

Derivando si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial H} &= -\cos \vartheta & \frac{\partial M}{\partial H} &= \eta \\ \frac{\partial N}{\partial V} &= \sin \vartheta & \frac{\partial M}{\partial V} &= \xi \\ \frac{\partial N}{\partial M} &= 0 & \frac{\partial M}{\partial M} &= 1\end{aligned}$$

Sostituendo nelle [43] questi valori di N , di M e delle loro derivate parziali prime, si vengono evidentemente a rendere esplicite le tre incognite H , V , M .

Tenuto il debito conto della simmetria e della particolare scelta degli assi, quelle tre equazioni divengono:

$$\begin{aligned}-\int_s N_0 \cos \vartheta \frac{ds}{EA} + \int_s M_0 \eta \frac{ds}{EJ} + H \left[\int_s \cos^2 \vartheta \frac{ds}{EA} + \int_s \eta^2 \frac{ds}{EJ} \right] - \\ - \int_s \bar{\lambda} \cos \vartheta ds + \int_s \bar{\mu} \eta ds = 0 \\ \int_s N_0 \sin \vartheta \frac{ds}{EA} + \int_s M_0 \xi \frac{ds}{EJ} + V \left[\int_s \sin^2 \vartheta \frac{ds}{EA} + \int_s \xi^2 \frac{ds}{EJ} \right] + \\ + \int_s \bar{\lambda} \sin \vartheta ds + \int_s \bar{\mu} \xi ds = 0 \\ \int_s M_0 \frac{ds}{EJ} + M \int_s \frac{ds}{EJ} + \int_s \bar{\mu} ds = 0\end{aligned} \quad [44]$$

Queste equazioni definiscono lo stato di equilibrio del sistema in funzione della sollecitazione esterna e delle deformazioni plastiche.

Noi ce ne possiamo pertanto servire per rendere razionale la scelta dello stato effettivo di equilibrio, tra tutti i possibili stati equilibrati, subordinandola all'analisi delle deformazioni plastiche.

Il problema, in pratica, si può presentare sotto due aspetti nettamente distinti.

In sede di progetto — e cioè fino a che le dimensioni della struttura non sono ancora state stabilite in modo definitivo — nulla ci vieta di porci proprio da quel punto di vista a cui abbiamo avuto occasione di accennare allorquando abbiamo ricordata la scuola dell'HENNEBIQUE.

Se infatti si attribuiscono ad H , a V e ad M dei valori arbitrari, le [44] si possono interpretare come le condizioni a cui debbono soddisfare le deformazioni plastiche (o quanto meno i loro parametri $\bar{\lambda}$ e $\bar{\mu}$) perchè la configurazione definita da quei valori diventi possibile: ed il progettista nè potrà trarre norma onde proporzionare la sua struttura in modo che quelle deformazioni effettivamente si realizzino, restando contenute entro quei limiti che il materiale può senza danno sopportare.

In sede di verifica delle condizioni statiche di una struttura già eseguita — o quanto meno già progettata, e quindi perfettamente definita in tutte le sue parti — le deformazioni plastiche sono invece da considerarsi come completamente determinate in funzione dello stato di tensione, vale a dire in funzione dei valori delle incognite iperstatiche H , V ed M .

Ora, se si potesse, e si sapesse, esprimere in modo semplice la legge di dipendenza delle deformazioni plastiche dai valori delle incognite iperstatiche, il problema sarebbe senz'altro riportato a quello della risoluzione delle [44] rispetto a queste incognite.

Ma questa legge è, nei singoli casi concreti, tutt'altro che semplice da esprimersi. In ogni caso noi sappiamo già che non è lineare.

Perciò, in pratica, si è quasi sempre costretti a ricorrere al metodo delle approssimazioni successive. Si constata per altro che pochi tentativi, purchè ragionevolmente impostati, bastano quasi sempre ad individuare la soluzione con un'approssimazione più che sufficiente per tutti i bisogni e le esigenze della tecnica.

In tesi generale, una conclusione di fondamentale importanza si può trarre da quel che siamo venuti dicendo, ed è questa: che, mentre nel caso delle travi isostatiche (in cui la sollecitazione relativa ad una sezione generica ha un valore staticamente determinato) l'intervento delle deformazioni plastiche si limita a determinare una alterazione della legge secondo cui la sollecitazione si ripartisce sulla sezione, nei

sistemi iperstatici (in cui la sollecitazione stessa è staticamente indeterminata) tale intervento può influire, ed effettivamente influisce, sulla grandezza non solo, ma spesso anche sulla natura della sollecitazione, determinando alterazioni dello stato di equilibrio ben più profonde ed essenziali ⁽¹⁾.

IX. — LA FUNZIONE STATICA DELLE DEFORMAZIONI PLASTICHE.

Da quel che siamo venuti dicendo nei precedenti capitoli appare chiaro che le deformazioni plastiche operano in favore della stabilità, almeno per rapporto alla sollecitazione che ad esse ha dato origine.

Ma il nostro studio non può evidentemente limitarsi qui: le strutture di cui noi ci occupiamo sono quasi sempre soggette a sollecitazioni variabili.

Ora quando una di queste sollecitazioni determina l'intervento di deformazioni plastiche e la conseguente formazione di uno stato permanente di coazione, noi siamo naturalmente condotti a chiederci come questo stato di coazione influirà poi sugli stati di equilibrio che potranno venir determinati da altre sollecitazioni successivamente applicate alla struttura.

È poichè è evidente che questa influenza potrà, a seconda dei casi, esser benefica o nociva, tutta una serie nuova di problemi si presenta alla nostra mente, fra cui, fondamentale ai fini della tecnica, il seguente: se vi siano delle categorie ben definite di sollecitazioni per rapporto alle quali un sistema di deformazioni plastiche opportunamente scelto possa determinare una modificazioni di stati di equilibrio utile, vale a dire traducibile in un aumento dei margini di sicurezza della struttura.

Per far vedere come ciò possa avvenire noi ci riferiremo anche qui ad un caso molto particolare. Considereremo cioè un solido cilindrico a sezione circolare — un filo per esempio — e lo supporremo sollecitato a semplice torsione.

⁽¹⁾ Su questo particolare argomento il lettore troverà più ampi ragguagli nella mia Nota intitolata *Les déformations plastiques et le dimensionnement des systèmes hyperstatiques* in corso di stampa su « L'ossature Metallique », Bruxelles, 1958 (n. 7-8).

Sotto l'azione di un dato momento torcente Q si determina in un punto generico della sezione retta del filo una tensione tangenziale τ che (in conformità a quanto accade in regime elastico) noi riterremo in ogni caso diretta normalmente al raggio che passa per quel punto, e funzione della sola distanza r del punto stesso dal centro della sezione.

Ora noi vogliamo supporre che, sotto l'azione di quel momento torcente, il limite di elasticità del materiale venga superato, almeno in una certa regione (periferica) della sezione; e che perciò, nel punto generico considerato, oltre alla deformazione elastica

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

possa essersi verificata anche una deformazione plastica $\bar{\gamma}$ che riterremo diretta come la γ normalmente al raggio, e come essa funzione della sola r .

Allora, ricordando quel che a suo tempo abbiamo detto a proposito della torsione in generale, e tenendo presente che, nel caso della sezione retta circolare,

$$\psi = \text{costante}$$

e quindi

$$q = 1$$

si ha, conformemente alla [22],

$$\omega = \frac{Q + G \int_A \bar{\gamma} r dA}{G J_0}$$

In funzione di questa ω si possono esprimere, come ben sappiamo, tanto lo stato di deformazione

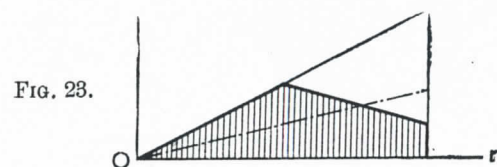
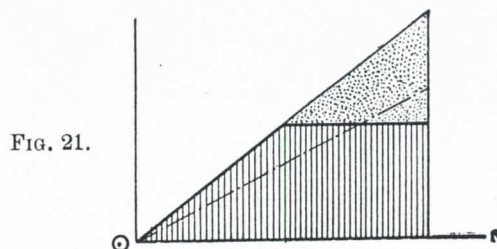
$$\gamma + \bar{\gamma} = \omega r$$

come lo stato di tensione

$$\tau = G (\omega r - \bar{\gamma}) \quad [45]$$

La legge secondo cui la τ varia in funzione di r è graficamente rappresentata in figura 21.

Supponiamo ora che si annulli la sollecitazione che ha determinato il superamento del limite di elasticità e la conseguente formazione di



deformazioni plastiche. Va da sé che queste deformazioni plastiche continueranno a sussistere, e con esse lo stato di coazione a cui esse hanno dato origine. Si avrà

$$\gamma + \bar{\gamma} = \bar{\omega} r$$

e

$$\tau = G (\bar{\omega} r - \bar{\gamma}) \quad [46]$$

con

$$\bar{\omega} = \frac{\int_A \bar{\gamma} r dA}{J_0} \quad [47]$$

Ciò è quanto dire che, nel tronco di filo di lunghezza dz , sussisterà una torsione permanente grazie alla quale una delle sezioni estreme del tronco presenterà, per rapporto all'altra considerata come fissa, una rotazione rigida di ampiezza

$$\bar{\omega} dz$$

che non dipende dai singoli valori delle singole deformazioni plastiche, nè dal modo particolare con cui esse sono distribuite sulla sezione, ma soltanto dal valore del momento

$$\int_A \bar{\gamma} r dA$$

Invece lo stato di tensione (fig. 22) dipende esplicitamente dal modo con cui le deformazioni plastiche si sono distribuite sulla sezione.

Vediamo ora quel che accade se si ripristina la sollecitazione.

Noi sappiamo già che, fin che la nuova sollecitazione Q' si mantiene di intensità inferiore, o tutt'al più eguale, alla sollecitazione Q che in un primo tempo ha determinate le deformazioni plastiche, il fenomeno si svolge secondo le leggi della perfetta elasticità, nel senso che non si verificano deformazioni plastiche nuove.

Le tensioni tangenziali si potranno pertanto esprimere sotto la forma

$$\tau = G (\bar{\omega} r - \bar{\gamma}) + \frac{Q' r}{J_0} \quad [48]$$

ed avranno un andamento del tipo di quello rappresentato nella figura 23.

Lo stato di coazione preesistente ha dunque questo effetto, di far sì che la massima tensione tangenziale non si verifichi più sul contorno della sezione, ma in corrispondenza di punti più o meno interni.

Ne segue che, per una variazione data del momento torcente, la massima variazione della tensione tangenziale si verifica ancora sul contorno, ma tra valori limiti ridotti; mentre là dove le tensioni limiti assumono i valori massimi riesce ridotta l'ampiezza della variazione (fig. 24).

Ciò può avere una grande importanza pratica, in quanto può allontanare il pericolo delle rotture occasionate da piccoli difetti, specialmente superficiali, del materiale, difetti che sono particolarmente

temibili nel caso di sollecitazioni ripetute, ed a cui i tecnici sogliono riferire le rotture per fatica.

Si spiega così come, nel caso delle molle per valvole di motori a combustione interna — in cui il filo è soggetto ad una sollecitazione



Fig. 24.

a torsione di intensità oscillante tra un minimo ed un massimo, ma sempre del medesimo segno — l'esperienza abbia, in certi casi, dimostrato la possibilità di accrescere sensibilmente la resistenza alla fatica assoggettando preventivamente il filo stesso ad una torsione preliminare di intensità tale da determinarvi delle deformazioni permanenti.

Allo stato attuale delle nostre conoscenze il problema deve però considerarsi come semplicemente impostato: un campo nuovo di ricerche si apre agli studiosi, sul quale teoria ed esperienza non hanno ancor detta la loro ultima parola.

PUBBLICAZIONI DELL'AUTORE

SULLO STESSO ARGOMENTO

- (1) *I fondamenti della Statica*, U.T.E.T., Torino, 1928.
- (2) *La statica delle costruzioni*, U.T.E.T., Torino, 1932.
- (3) *Sul principio di reciprocità*, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », serie 5^a, vol. XXI (1912).
- (4) *Su di una reciprocità fra deformazioni e distorsioni*, « Rend. R. Acc. Lincei », serie 5^a, vol. XXIV (1915).
- (5) *Sulle distorsioni dei sistemi elastici piani più volte connessi*, « Rend. R. Acc. Lincei », serie 5^a, vol. XXIV (1915).
- (6) *Su certi stati di coazione elastica che non dipendono da azioni esterne*, « Rend. R. Acc. Lincei », serie 5^a, vol. XXVI (1917).
- (7) *Su di una particolare classe di coazioni elastiche che si incontra nello studio della resistenza delle artiglierie*, « Rend. R. Acc. Lincei », serie 5^a, vol. XXVII (1918).
- (8) *Una proprietà caratteristica delle coazioni elastiche nei solidi elasticamente omogenei*, « Rend. R. Acc. Lincei », serie 5^a, vol. XXVII (1918).
- (9) *Sul problema delle coazioni elastiche*, « Rend. R. Acc. Lincei », serie 5^a, vol. XXVII (1918).
- (10) *Applicazione a problemi tecnici di un nuovo teorema sulle coazioni elastiche*, « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. LIV (1918).
- (11) *Per una teoria generale delle coazioni elastiche*, « Atti R. Acc. delle Scienze di Torino », vol. LVI (1921).
- (12) *Nuovo contributo alla teoria delle coazioni elastiche ed alle sue applicazioni tecniche*, « Rend. R. Acc. Lincei », serie 6^a, vol. VII (1928).
- (13) *Su l'equilibrio elastico dei sistemi in cui si verificano anche deformazioni non elastiche*, « Rend. R. Acc. Lincei », serie 6^a, vol. XXV (1937).
- (14) *Nuovi punti di vista sulla statica degli archi molto ribassati*, « L'Ingegnere », vol. XI, Roma, 1937.
- (15) *Sul calcolo delle deformazioni delle travi in cemento armato*, « Il cemento armato », Milano, 1937.

- (16) *Saggio di una teoria generale dell'equilibrio elasto-plastico*, Pontificia Academia Scientiarum, « Commentationes », a. II, vol. II, n. 2, Città del Vaticano, 1938.
- (17) *Analisi delle deformazioni plastiche e del conseguente stato di tensione nelle travi in cemento armato*, « Il cemento armato », Milano, 1938.
- (18) *Su la possibilità di un razionale impiego delle deformazioni plastiche dei materiali*, « L'Ingegnere », vol. XII, Roma, 1938.
- (19) *Incrudimento ed isteresi elastica nel quadro della nuova teoria dell'equilibrio elasto-plastico*, Pontificia Academia Scientiarum, « Commentationes », a. II, vol. II, n. 8, Città del Vaticano, 1938.
- (20) *Il secondo principio di reciprocità e le sue applicazioni al calcolo delle deformazioni permanenti*, « Rend. R. Acc. Lincei », serie 6^a, vol. XXVII (1938).



ANNUARIO

Vol. I (1936-37), di pagine 944 e 87 tavole in fototipia, fuori testo.

ACTA

- Resoconto della solenne seduta inaugurale del 1° giugno 1937 e della prima Terza Accademia accademica.*
Acta, vol. I, n. 1, pag. 1-xx
- U. CISOTTI, *Asfericità di una superficie in un suo punto ordinario.*
Acta, vol. I, n. 1, pag. 1-7.
- G. FINZI, *Nuovi dati sul virus tubercolare e sulla natura della «esotubercolosi spenta»* (con 2 tavole f. t.).
Acta, vol. I, n. 2, pag. 9-17.
- M. BOLDRINI, *Contributi alla storia della statistica: I. Sull'introduzione del metodo statistico in Biologia.*
Acta, vol. I, n. 3, pag. 19-27.
- C. FERRARI, *Problemi della dinamica dei fluidi compressibili a velocità ipersoniche.*
Acta, vol. I, n. 4, pag. 29-38.
- R. S. VARMA M. Sc., *An infinite integral involving Bessel function and Sonin polynomial.*
Acta, vol. I, n. 5, pag. 37-41.
- S. RANZI, *Ricerche sulla fisiologia dell'embrione dei cefalopodi* (con 2 figure n. t.).
Acta, vol. I, n. 6, pag. 43-48.
- N. PARRAVANO e M. GIORDANI, *Le proprietà ossidanti dell'acqua di Fiuggi.*
Acta, vol. I, n. 7, pag. 51-56.
- E. PISTOLESI, *Sulla teoria delle ali sottili* (con 4 figure n. t.).
Acta, vol. I, n. 8, pag. 57-72.
- F. ODONE, *Su alcune proprietà di geometria differenziale dei campi vettoriali.*
Acta, vol. I, n. 9, pag. 73-84.
- M. TIBOR, *The distribution of the stars in the Cepheus-Lacerta region* (con 3 figure n. t.).
Acta, vol. I, n. 10, pag. 85-92.
- C. POSSIO, *L'azione aerodinamica sul profilo oscillante alle velocità ultrasuoni* (con 7 figure n. t.).
Acta, vol. I, n. 11, pag. 93-100.

COMMENTATIONES

- A. GEMELLI, *Nuovo contributo alla conoscenza della struttura delle vocali* (con tavole f. t. e 20 figure n. t.).
Commentationes, vol. I, n. 1, pag. 1-43.
- U. NOBILE, *Sulle variazioni termiche del gas contenuto nella carena di un'aeronaue e conseguenti variazioni di forza ascensionale* (con 5 figure n. t.).
Commentationes, vol. I, n. 2, pag. 45-75.
- A. GATTERER, *Spektralreines Eisen* (con 3 tavole f. t.).
Commentationes, vol. I, n. 3, pag. 77-88.
- H. ROHRACHER, *Die gehirnelektrischen Erscheinungen bei verschiedenen psychischen Vorgängen* (con 4 tavole f. t.).
Commentationes, vol. I, n. 4, pag. 89-133.
- G. REVERBERI, *Ricerche sperimentali sulla struttura dell'uovo fecondato delle Ascidie* (con 15 figure n. t.).
Commentationes, vol. I, n. 5, pag. 135-172.
- G. ARTURO CROCCO, *L'iperbole di stabilità laterale nella dinamica dei velivoli* (con 3 figure n. t.).
Commentationes, vol. I, n. 6, pag. 175-195.
- L. GIALANELLA, *Determinazione della longitudine della Torre Capitolina e della Torre del primo meridiano d'Italia a Monte Mario.*
Commentationes, vol. I, n. 7, pag. 197-276.
- F. LORETI, *Esperienze ed osservazioni sulla microfluorescenza della fibra nervosa (periferica) con particolare riguardo alla mielina* (con 1 tavola f. t. ed 1 figura n. t.).
Commentationes, vol. I, n. 8, pag. 277-331.
- C. BARIGOZZI, *Lo studio degli spodiogrammi dei cromosomi* (con 12 tavole f. t.).
Commentationes, vol. I, n. 9, pag. 333-351.